紹　介

交通流のKinematic Waveモデルの解析法

Analysis Methods of Kinematic Wave Model of Traffic Flows

和　田　健太郎*

本稿は，交通流のKinematic Wave（KW）モデルの解析法を解説する。より具体的には，KWモデルの最新の解析法である「変分理論」およびKWモデルの拡張の基礎となる「Demand/Supplyアプローチ」を中心に解説を行う。また本稿は，本特集の以降の4編（理論編）の導入とも位置付けられる。そのため，KW理論の利点や背景にある考え方について触れるとともに，以降の章でも用いる記号や概念の定義（およびその参考文献）を与える。従って，以降の解説の前に目を通して頂くとともに，必要に応じて適宜参照されたい。

キーワード　交通流　Kinematic Wave　変分理論　Cell Transmission Model
Demand/Supply

1. はじめに

1.1 Kinematic Wave理論小史

本特集で取り扱うKinematic Wave（KW）理論（衝撃波理論）[1)2)]は1950年半ばに提案された最古参の交通流理論の一つであり，車両を流体近似して扱うマクロな枠組みである。同時期に提案された重要な理論枠組みが車両の運転挙動をミクロに記述する追従理論である[3)4)]。

KW理論はその提案の当初から渋滞の延伸・縮退をうまく表現できることは認識されつつも，同時に，その欠点（速度変更時の無限大の加速度等）が指摘されていた。そのため，次第に，マクロな交通流理論の興味はその欠点を克服するための高次マクロ交通流モデルや統計力学にヒントを得たモデルなどに移り，KW理論の研究は1990年頃まで下火の時代が続いた。また，この時期にはKWモデルの確立された数値解法もなく，実務への応用も限られたものだったと想像される。

この状況を打破したのが，1990年代に提案されたNewell[5)]による新たな理論解析法“最小化原理”とDaganzo[6)7)]やLebacque[8)]による数値解法“Cell Transmission Model（CTM）”である（注1)。これにより，現実的な条件下でKWモデルを理論的 / 数値的に解析する基礎が整備された。前者はさらに交通流の変分理論[10)11)]として一般化され，単一車線・車種の理論は完成されつつある。一方後者は複雑なボトルネック現象をモデル化する基礎としてKW理論の多車線化，多車種（クラス）化，そしてネットワーク化などの拡張に結実している。

また，KW理論の拡張が陰に陽に立脚する考え方が鮮明になったのも，この1990年代のように思われる。この時期は，感知器が世界的に普及したことにより，交通流パターンを詳細に調べることが可能となった。そして，1990年代半ばから2000年代半ばにかけて，その複雑なパターンの解釈や既存の交通流モデルの可否を問うさまざまな議論が交わされ，“交通流モデル論争”なる様相を呈していた[12)]。そのきっかけになったのは，自由流から自然発生的に（明確な原因がなしに）渋滞状態に至るのか，という問いである。ドイツを中心とした物理学コミュニティでは，こちらも1990年代に物理学者を中心にリバイバルした追

*［正会員］東京大学生産技術研究所助教 / カリフォルニア大学アーバイン校客員研究員
（TEL：03-5452-6098，e-mail：wadaken@iis.u-tokyo.ac.jp）

従モデル[13)14)]や高次マクロ交通流モデル[15)]の知見（不安定性による相転移）からその仮説を支持していた。

一方，カリフォルニア大学バークレー校を中心とした交通工学研究者は，自然発生的に見える渋滞もボトルネックにより予測可能なかたちで説明可能，つまり，交通流の不安定性は渋滞の結果であり，原因ではないと反論した[16)]。そして，複雑な交通現象（“stop-and-go traffic”や“capacity drop”，“hysteresis”等）は，道路構造上のボトルネックやそれに誘発される運転挙動により説明されるという考えのもと，2000 年代以降，完全に“安定な”KW モデルの拡張が精力的に進められている。ただし，ボトルネックと一口で言っても，分流・合流・織り込み・サグ・トンネルなどさまざまであり，そこでの運転挙動（車線変更 / 選択，加減速挙動）やその顕在化メカニズムは多種多様である。したがって，上述の拡張はこのような多様なボトルネックにおける交通流挙動の本質的な“因果”を理解し，理論化する試み[17)]と言えよう。

しかしなぜ KW モデルに基づき拡張が行われているのか。これにはいくつもの理由がある。第一に，必要とされるパラメータの数が少なく，そのパラメータの解釈が明確かつ観測が（比較的）容易であるためである。第二に，数学的な取扱いが容易であり，あるクラスの初期値問題が（多くの拡張モデルでも）解析的に解けるためである。これは一見学術的な興味に（過ぎないと）思われるかもしれない。しかし，さまざまな境界条件に応じてモデルがどのように振る舞うかをきちんと把握できるということは，複雑化を伴うモデル拡張に際して極めて重要である。なぜなら，KW 理論に限らず一般に，モデル拡張は，より複雑な交通現象を表現可能にする一方で，非現実的な交通流ダイナミクスをモデルに取り込む危険性を常に孕んでいるためである。実際，先に述べた高次マクロ交通流モデルは，有名な“レクイレム”論文[18)]によりその理論的欠陥を指摘され，文字通り一時はその地位を失いかけていた。第三に，ボトルネックの効率的運用・制御が求められる交通工学の観点からは，その因果がはっきりとモデル化されている KW モデルが適しているためであろう。

1.2　本特集（理論編）の狙い

本特集の本稿および以降の 4 編の目的は，上記の KW 理論の発展について解説することである。そこでは主に，拡張モデルの必要性や意義およびその拡張のポイントや課題について記述している（注 2）。その意図は，学術論文として点在する上述の拡張理論（教科書の多くは 1950 年代の議論に留まっている）をある程度一貫性のある形で整理し，アクセスしやすくすることである。

現在の理論も多くの課題は存在するが，従来 KW 理論では説明が難しいと考えられていた現象に対しても一定の説明が可能となってきている。一方，KW 理論の拡張という意味で我が国の貢献はそれほど多くはないが，さまざまな交通現象を世界に先駆けて見出すなど[21)]，豊富な実証的な知見がある。以降の解説が，我が国における実証的知見に基づくさらなる理論発展，理論に基づく実証・制御という科学的に健全なフィードバック関係促進の一助となれば幸いである。

本稿の構成は以下の通りである。2 章では交通流の表現についての基本事項を簡潔にまとめる。3 章では，単一車線・車種の KW モデルの理論解析法を解説する。4 章では，KW モデルの数値解法である CTM の解説から始め，以降の章の KW 理論の拡張の基礎となる Demand/Supply アプローチを解説する。5 章では，本稿のまとめとともに，本稿と以降の 4 編の関係について簡単に言及する。

なお以降の 4 編では，紙面の制約上，また定義などの繰り返しを避けるために，本稿で導入した記号や定義，略称は説明なしに用いることとする。

2.　交通流の基本事項

2.1　巨視的な交通状態量

交通流の平均的な状態を表現する巨視的な状態量は，**交通流率** q，**交通密度** k，**空間平均速度** v である。また，これらの状態量の最も基本的な関係式とされるのが次式，

$$q=kv \quad \cdots\cdots (1)$$

である。ただし，式（1）が通常の交通状態量の定義の下で一般に成立するのは，（各車両が車頭距離・速度一定で走行する）“定常状態”においてであることは，基本的であるが故に忘れがちである。一方，式（1）が恒等的に成立するような，一般的な交通状態量の定義は Edie[22] により提案されている。

上述の交通状態量に勝るとも劣らず重要なのが，ある地点 x を時刻 t までに通過する車両の**累積台数** $N(t,x)$ である（口絵を参照）。この曲線の傾きは交通流率を表し，同時刻の異なる 2 地点の曲線の差は，（途中出入がなければ）その区間に存在する車両存在台数を表す。従って，極限として，累積台数，流率，密度の関係は次のように表される。

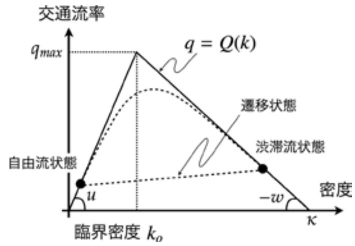
$$q(t,\ x)=\frac{\partial N(t,\ x)}{\partial t},\ k(t,\ x)=-\frac{\partial N(t,\ x)}{\partial x} \quad \cdots\cdots (2)$$

累積曲線は，ボトルネックにおける待ち行列や遅れを分析するのに非常に便利である。また，Makigami, et al.[23] によって提案された交通流の 3 次元表現（口絵を参照）は，その断面として時空間図や累積図を含み，交通流理論と待ち行列理論の融合，すなわち，以降で紹介する Newell の KW 理論や変分理論の基礎となっている。

2.2　定常状態における交通状態量の関係

交通状態量間の最も顕著な関係は「密度の上昇とともに速度が減少する」である。この k–v 関係と式（1）を組み合わせることで，q–k 関係や q–v 関係が導かれる。これらの関係を **Fundamental Diagram（FD）（交通基本図）** と呼ぶ。また以降では単に「FD」といった場合には特に q–k 関係を指す。FD としては，さまざまな関数形 $q=Q(k)$ が提案されているが，典型的な形状は図–1（実線／点線）に示す凹型のものである。特に三角形 FD は実証的にその近似の妥当性が確認されているだけでなく[24]，理論的にも扱い易いため，よく用いられる。

FD は道路の重要な交通流特性を情報として含む。まず，その道路の「**容量**」$q_{\max}$ を与える（そのときの密度を**臨界密度** k_o と呼ぶ）。また，この



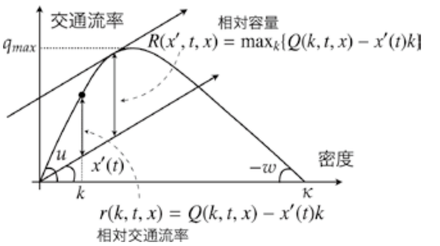
図–1　Fundamental Diagram

密度 k_o により交通状態が二つの“相”に識別される：$k\leq k_o$ の「**自由流状態**」と $k\geq k_o$ の「**渋滞流状態**」。なお，原点と FD 上の点を結ぶ傾きは平均速度であり（i.e., $v=q/k$），FD の傾き（i.e., $\partial Q/\partial k$）は **Wave 速度**と呼ばれる。三角形 FD は，その他，Forward Wave（FW）（自由流）速度 u，Backward Wave（BW）速度 w，ジャム密度 κ で特徴付けられる。

FD は観測結果に基づき定められるものであるが，感知器データを素朴に描画すると，大きなばらつきが見られる。ただし，これは必ずしも道路・交通流の平均的な特性が時々刻々変動することを意味するわけではない。なぜなら第一に，計測法（例えば，式（1）が成立しないこと）によっては誤差やバイアスが含まれるためである[25]。第二に，渋滞の末尾など交通状態が不連続に遷移する状況が観測時間帯に含まれるためである。この場合，時間帯内に含まれる自由流と渋滞流の割合や集計時間によって全く異なる（q,k）が生じ得る（図–1 の二つの状態を結ぶ点線上の任意の点）。そして，このような状態を含む q–k 関係が道路・交通流の“基本”的な特性を表現するとは考えづらい。従って，FD は定常状態で観測された（q,k）から定めるべきである[24]。定常状態を考えるもう一つの重要な理由は，以降の理論ではまさに定常（均衡）状態での q–k 関係を想定するためである。

3.　交通流の変分理論

本章では，KW モデルの解析法について紹介する。KW モデルは，局所的な車両数の「保存則」と「FD」を用いて交通流の時空間進展を記述／予測するものであり，偏微分方程式として表される。そして，与えられた初期・境界条件の下，そ



図–2　相対交通流率と相対容量

の偏微分方程式を（理論的に）解くアプローチをここでは解析法と呼ぶ。また，その偏微分方程式を数値的に解く方法は数値解法として区別する。

さて，本稿ではKWモデルの解析法を“数学的に”紹介することが目的ではなく（とは言え多少の数学は必要である），その“物理的な”（直感的な）イメージを示したい。そのために重要なのが“**移動観測者**”という概念である。移動観測者は，いわば道路上空をドローンのように飛びながら交通状態を観測する仮想的な観測者であり，その時空間図上での軌跡を$x(t)$，速度を$x'(t)$とする。いま移動観測者が時空間図の位置(t, x)，密度k，平均速度vの車群上を飛んでいたとすれば，観測交通流率$r(k, t, x)$は，(相対速度)×(密度)であり，

$$r(k, t, x) = Q(k, t, x) - x'(t)k \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \ (3)$$

となる。ここで，$Q(k, t, x)$はFDであり，式(3)は相対交通流率を表している（図–2を参照）。

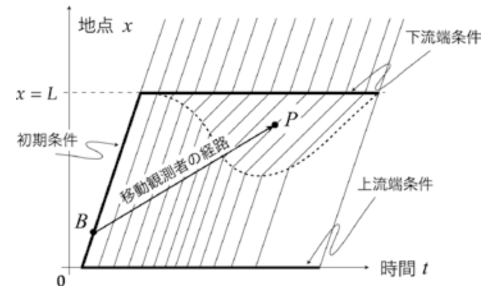
以降では，まず，KWモデルの最新の解析法である変分理論（Variational Theory, VT）[10)11)]を解説する。その後に，従来の解析法についても言及する。

3.1　変分問題としてのKWモデル

途中出入りかつ追い越しのない（First-In-First-Out, FIFO）道路区間を考える。また，初期条件や道路上流端／下流端の境界条件が与えられているとする。VTでは，状態変数を累積台数$N(t, x)$とし，2.1節で述べたような3次元曲面を初期・境界条件から予測する。KWモデルの要素の一つである「FD」は，式(2)を用いれば，

$$\partial N(t, x)/\partial t = Q(-\partial N(t, x)/\partial x, t, x) \ \cdots \ (4)$$

の偏微分方程式(解くべき問題)として表される。一方，「保存則」は「3次元曲面$N(t, x)$が連続」という条件で表される（なぜなら，累積台数の不連続なジャンプは途中出入りを意味するため）。



図–3　移動観測者による交通流観測

さて以降では，図–3の時空間図の点$P = (t_P, x_P)$の累積台数N_PをFDにより予測するという問題を考え，KWモデルが変分問題（注3）として記述できることを見よう。いま仮に時空間図上の状態（密度）がわかっていれば，境界上の点$B = (t_B, x_B)$の累積台数N_Bに，点BP間の経路pを通る移動観測者が観測する車両台数Δ_p（観測者の経路を横切る車両の総数）を加えればよいであろう：$N_P = N_B + \Delta_p$。ここで，Δ_pは相対交通流率（3）を経路に沿って積分したものである。

もちろん，実際には時空間図上の状態は事前にわからないのであるが，Δ_pの“上限”であれば，FDから予測できそうである。具体的には，速度$x'(t)$の移動観測者が観測する相対交通流率（3）の上限である“**相対容量**”$R(x', t, x)$，

$$R(x', t, x) = \max_k\{Q(k, t, x) - x'(t)k\} \cdots \ (5)$$

をその経路に沿って積分した$\Delta(p)$は，$\Delta_p \leq \Delta(p)$を満たす。ここで，相対容量は，観測者の速度とFDの傾きが一致する密度で実現する相対交通流率である（図–2）。ここで重要な点は，$\Delta(p)$は移動観測者の通る経路pさえ与えれば，密度は知らずとも簡単に評価できる点である（ここでは経路pの関数という意味で$\Delta(p)$と表現している）。

以上の考えを，点Pに影響を与え得る任意の境界上の点（詳細は省くが点PからWave速度$[-w, u]$で遡れる点）から出発する任意の経路pに適用すれば，N_Pは少なくとも以下の式（制約条件），

$$N_P \leq N_{B(p)} + \Delta(p), \ \forall p \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (6)$$

を満たす必要があることになる。ここで，$B(p)$

は経路 p の起点である。VT ではさらに，交通流の自然な特性として制約(6)の中でなるべく多くの交通が流れると仮定する。従って最終的に N_P は，

$$N_P = \min_p \{N_{B(p)} + \Delta(p)\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

と与えられる。これは，KW モデル（4）が，境界上の点と点 P の間の最短経路（経路の長さは $N_{B(p)} + \Delta(p)$ で測られる）を求める変分問題（7）として表されることを意味している。

3.2　単純化と VT に基づく数値解法

三角形型の FD を持つ一様な道路区間を考える。この状況における変分理論の重要な特性は「関数 $\Delta(p)$ が経路 p によらず起終点にのみ依存する」ことである。それを $\Delta(B, P)$ と書くとすると，

$$\begin{aligned}\Delta(B, P) &= q_{max}(t_P - t_B) - (q_{max}/u)(x_P - x_B) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{if } x'(t) = u \\ \kappa(x_P - x_B) & \text{if } x'(t) = -w \end{cases} \cdots (8)\end{aligned}$$

従って，問題（7）は境界選択問題に帰着する。

$$N_P = \min_B \{N_B + \Delta(B, P)\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

ここで，境界条件が現実的には離散的に与えられるとすれば，式（9）は有限個の要素の最小化となる（式（7）は無限個の要素）。従って，境界条件から FW 速度 u，BW 速度 $-w$ で到達可能な任意の点（図–4 の灰色領域）の累積台数を（準）解析的に求めることができる。

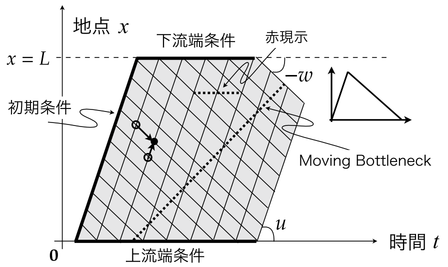
一方，時空間の離散化した点を systematic に求める数値解法も実用上は重要である。Daganzo[11] ではこの点を FW 速度，BW 速度に沿って配置すれば（図–4 のグリッド）緩い条件下で厳密に（数値誤差なく）各点の累積台数が計算できることを示している。具体的には，このグリッド上では，各点（黒丸）の累積台数は隣接する点（白丸）から（シミュレーションのように）逐次的に計算される。

$$\begin{aligned}N(t, x) = \min\{&N(t - \Delta x/u, x - \Delta x), \\ &N(t - \Delta x/w, x + \Delta x) + \kappa\Delta x\} \cdots (10)\end{aligned}$$

式（10）は式（9）の境界 B を隣接する二つの点としたものであり，（離散化された）問題（9）を動的計画法で解くことに相当する。VT に基づくこの数値解法は後に触れる CTM に比べてその計算精度・効率ともに高いことが知られている。

3.3　ボトルネックの取扱いとデータ融合

VT において，時間的・空間的なボトルネック



図–4　VT の数値解法

は，「時空間上の軌跡」と「相対容量」により表現される。例えば，図–4 のように信号の赤現示がある場合，時空間上に新たに水平線（軌跡）を追加し，その軌跡を通る際の相対容量を 0 とすればよい。同様に，追い越しのできないプローブや moving bottleneck（遅い車）などのデータがある場合にも，その軌跡に沿った相対容量を 0 にすればよい。

以上のように，VT では時空間上のさまざまな境界条件を柔軟に取り入れることができ，その拡張問題も上記と同様に（動的計画法として）数値的に簡単に扱うことができる。従って，感知器データとプローブデータの融合などさまざまなソースから得られるデータ融合の際に極めて有用である[26]。

3.4　従来の解析法との関係

1）Lighthill-Whitham-Richards モデル[1)2)]

初期の KW モデル（LWR モデルと呼ぶ）における状態変数は密度であり，局所的な保存則，

$$\frac{\partial k(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial q(t, x)}{\partial x} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

に FD（一様な道路を仮定する）を代入した，密度に関する以下の偏微分方程式を対象としている。

$$\frac{\partial k(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial Q(k(t, x))}{\partial k}\frac{\partial k(t, x)}{\partial x} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

さて，この式の左辺は移動観測者が Wave 速度 $x'(t) = \partial Q/\partial k$ で走行したとき（その軌跡を Wave 経路呼ぼう）の密度の変化量 $\mathrm{d}k(t, x(t))/dt$ を表している。つまり，式（12）は Wave 経路（ここでは直線）に沿った密度変化は 0 となることを表している。

ここで3.1節の議論を思い出そう。VTでは時空間図上の状態がわからないため，累積台数の上限を評価したのであった。しかし，境界条件上の密度が，その点から出発するWave経路上では変わらないことを利用して直接密度を求めることもできそうである。これが古典的な解析法（特性曲線法と呼ばれる）である。ここで問題となるのは，複数の境界条件から出発したWave経路が交わる場合である。このとき，その点で密度が不連続に変化し（衝撃波が生じ），保存則（13）中の微分は成立しない。そこで，衝撃波が速度ωで動くとして再び保存則を求める。衝撃波の上流の状態をk_1，下流の状態をk_2とすると，この衝撃波に沿って移動する観測者が観測する交通流率は一致しなければならない。ここで式(3)を用いれば，衝撃波速度の式が得られる。

$$\omega=\frac{Q(k_1)-Q(k_2)}{k_1-k_2} \quad\cdots\cdots(13)$$

つまり，LWRモデルの解析法は，Wave経路と衝撃波を組み合わせながら時空間図上の密度を決定していく手法と言える(その手順は4.1節も参照)。

2）NewellのKW理論[5)]

NewellのKW理論は上記1)項の手法とVTの中間的な手法である。具体的には，Wave経路に沿って密度を求めるという点は上記と変わらない。ただし，状態変数は累積台数であり，密度と同時にWave経路に沿った累積台数の変化量（相対交通流率）を求めていく点が異なる。また，複数のWave経路が交わる場合には累積台数を用いた保存則を導入する。すなわち，3.1節で述べた「3次元曲面$N(t,x)$が連続」という条件である。この条件は，複数のWave経路から予測される累積台数$N_{B(p')}+\Delta_{p'}$のうち最小のものを選択する(最小化原理)，

$$N_P=\min_{p'}\{N_{B(p')}+\Delta_{p'}\} \quad\cdots\cdots(14)$$

ことで満たされる。この式を見ればわかるように，VTの式（9）とほぼ同型である。ただし，p'はWave経路であること，つまり，$\Delta_{p'}$は累積台数の上限ではなく（3.1節の交通状態がわかっているケースのように）その経路上の密度に基づき予測されたものであることが異なる。

最後に，歴史的な発展の経緯を簡単に述べる。LWRモデルの解析法の最大の難点は，衝撃波の計算である。例えば図-3の点線で表される衝撃波を境界条件から求めるのは非常に煩雑な手続きを必要とする。この衝撃波の取扱いを不要とした点でNewellの理論は画期的である。つまり，式（14）の条件を時空間図上の任意の点に適用した結果として衝撃波の経路は決まる。DaganzoによるVTはNewellの理論を一般化し，Wave経路を取扱い不要とした。これにより，3.3節で述べたような時空間内の異質性の取扱いが容易となった。

4. Demand/Supplyアプローチ

ここまでで解説した変分理論により単一道路のKW理論はある程度完成しつつある。しかし，それだけでは，合流や分流，車線変更や加減速挙動などの要素により顕在化すると考えられる，より複雑なボトルネックを記述することは難しい。本章では，単一道路のモデルに整合的な形で上述の要素をKW理論に取り入れる手法を解説する。

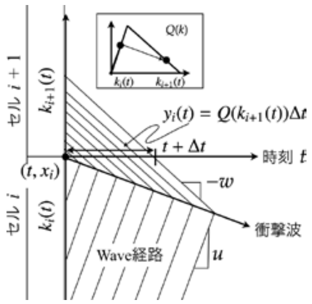
4.1 Cell Transmission Model（CTM）[7)-9)]

CTMはLWRモデルの数値解法（Godunov法）であり，道路区間をセルに分割し，セル単位での交通流の時空間進展をモデル化するものである。CTMでは図-1のような区分線形近似したFDを用いる。また，セルは通常，単位時間あたりにFW速度で進む距離で分割される：$\Delta x=u\Delta t$。CTMにおいて，流率・密度に対応する変数は，時間t～$t+\Delta t$間に地点x_iを通過する交通量$y_i(t)$と時刻tのセル(x_i～$x_{i+1}=x_i+\Delta x$)の車両台数$n_i(t)$である。

CTMにおける保存則は式（11）を離散化したものであり，次式で与えられる。

$$n_i(t+\Delta t)=n_i(t)+y_i(t)-y_{i+1}(t) \quad\cdots\cdots(15)$$

続いて，交通量$y_i(t)$を求めるために，セル断面の上流・下流の密度をそれぞれ$k_i(t)$($=n_i(t)/\Delta x$)，$k_{i+1}(t)$とした初期値問題（リーマン問題）を考えてみよう（図-5）。この例の場合，下流側セルが渋滞流状態であり$-w$の速度を持つWave経路に沿って密度$k_{i+1}(t)$が進展し，自由流状態の上流



図–5 初期値（リーマン）問題

側セルからは u の速度を持つ Wave 経路に沿って $k_i(t)$ が進展し，両 Wave 経路が交わる点で衝撃波が発生する。この結果から，セル断面は下流側の状態となるため，交通量 $y_i(t)$ が求まる。

Daganzo[6]，Lebacque[8] はさらに，任意の初期値を持つリーマン問題の結果決まるセル断面の交通量が次式で求まることを明らかにした。

$$\begin{aligned} y_i(t) &= \min\{n_i(t),\ q_{max}\Delta t,\ (w/v)[\kappa\Delta x - n_{i+1}(t)]\} \\ &= \min\{uk_i(t),\ q_{max},\ w[\kappa - k_{i+1}(t)]\}\,\Delta t \end{aligned} \quad \cdots\cdots (16)$$

第二式からわかるように，これは FD を表している。この式の重要な点は，FD の自由流側は上流側の密度 $k_i(t)$，FD の渋滞流側は下流側の密度 $k_{i+1}(t)$ により表されていることである。これにより FD および KW モデルの新たな解釈が与えられた：「FD の自由流側はその断面を通過したい交通の Demand を表しており，渋滞流側は下流側で受け入れ可能な交通の Supply を表している」；「KW モデルでは Demand/Supply という制約の中で最大の交通が流れる（式(16)）」。後者は 3.1 節で述べた VT の仮定と整合的である。

4.2 Demand/Supply とその応用

Demand/Supply は一般には次式で定義される（それぞれ三角形の FD の場合の定義も示した）。

$$\begin{aligned} D(k) &\equiv Q(\min\{k, k_0\}) = \min\{uk, q_{max}\} \\ S(k) &\equiv Q(\max\{k, k_0\}) = \min\{q_{max}, w[\kappa - k]\} \end{aligned} \quad \cdots\cdots (17)$$

この概念の応用範囲は極めて広く，単一道路の CTM に留まらない。例えば，合流や分流，交差点や多車線道路など，複数の道路の境界含む問題は Demand/Supply 制約の中で適切な交通流を求める問題として記述される。また，この Demand/Supply を工夫することにより，車両の加速限界を KW モデルに取り入れる研究[27] も行われている。

これら拡張の顕著な特徴は，前節で示したようなリーマン問題を解くことができるという点である。従って，1.1 節でも述べたように，その拡張モデルの基本的な挙動は把握でき（追加した要素が交通流に与える影響を理論的に調べることができる），かつ，前節のように CTM-based のシミュレーションモデルも容易に構築できる。

なお，ここでは CTM（LWR モデル）に基づき Demand/Supply を定義したが，VT（または Newell の KW 理論）に基づき Demand/Supply を定義することもできる。この交通流モデルは Link Transmission Model（LTM）[28] と呼ばれ（注4），CTM よりも計算効率的かつ計算精度も高いため，近年でも活発に研究が進められている[30]。

5. おわりに

本稿は，KW モデルを変分問題として記述する変分理論（VT）を解説するとともに，複数の道路の境界の相互作用を含むより複雑なボトルネックをモデル化する基礎となる Demand/Supply アプローチを紹介した。VT の意義は一目ではわかりづらいが，KW モデルの新たな見方を提示するとともに，さまざまな拡張につながっている。本特集の範囲でも，瀬尾氏の解説する KW モデルと等価な追従モデルは VT に基礎を置いており，日下部氏・和田の解説する確率的交通流モデルでも VT に基づく開発が進められている。また，中川氏らによる車両感知器とプローブを融合した交通状態推定は VT の実適用の好例と言える。一方，Demand/Supply アプローチは瀬尾・柳原氏の解説にある多車線・多クラスモデルや中西・佐津川氏が解説するネットワーク交通流モデルで中心的な役割を果たす。

最後に，長年 KW 理論の研究を牽引している Daganzo[17] の 1999 年（単一道路を超えた拡張が本格化する直前）のメッセージを引用して本稿を締めたい：“*It is my opinion that too much effort* *is spent by our research community today developing models of traffic behavior for homogeneous roads, and that not enough experimental work is being done to see how things really are. Homogenous roads are important, but we should really bring the focus of our lenses to the things that matter most. And these are the bottlenecks."*

脚　注

(注1) 同種の計算法は，日本では1970年代に「ブロック密度法」として開発されていた[9]。

(注2) 本稿を含む以降5編で紹介する理論のより詳細な解説は和田ら[19)20)]，一部のモデルのExcelによる実装例は下記を参照されたい。
https://www.researchgate.net/project/Kinematic-Wave-Models-A-Survey

(注3) 有名な変分問題の例としてはフェルマーの原理（光は光学的長さの最短経路を通る）がある。

(注4) ほぼ同様の方法は2001年時点ですでにKuwahara and Akamatsu[29)]により提案されている。

参　考　文　献

1) Lighthill, M. J. and Whitham, G. B.；"On kinematic waves. I. Flood movement in long rivers. II. A theory of traffic flow on long crowded roads", Proc. R. Soc. A, Vol. 229, No. 1178, pp. 281〜345, 1955
2) Richards, P. I.；"Shock waves on the highway", Oper. Res., Vol. 4, No. 1, pp. 42〜51, 1956
3) Kometani, E. and Sasaki, T.；"On the stability of traffic flow", J. Oper. Res. Soc. Japan, Vol. 2, No. 1, pp. 11〜26, 1958
4) Herman, R., et al.；"Traffic dynamics：analysis of stability in car-following", Oper. Res., Vol. 7, No. 1, pp. 86〜106, 1959
5) Newell, G. F.；"A simplified theory of kinematic waves in highway traffic, part I：General theory；part II：Queueing at freeway bottlenecks；part III：Multi-destination flows", Transp. Res. B, Vol. 27, No. 4, pp. 281〜313, 1993
6) Daganzo, C. F.；"The cell transmission model：A dynamic representation of highway traffic consistent with the hydro-dynamic theory", Transp. Res. B, Vol. 28, No. 4, pp. 269〜287, 1994
7) Daganzo, C. F.；"The cell transmission model, part II：Network traffic", Transp. Res. B, Vol. 29, No. 2, pp. 79〜93, 1995
8) Lebacque, J. P.；"The Godunov scheme and what it means for first order traffic flow models", Proc. of the 13th ISTTT, pp. 647〜677, 1996
9) 桑原雅夫 他；"ブロック密度法を用いた交通流の表現方法について", 交通工学, Vol. 32, No. 4, pp. 39〜44, 1997
10) Daganzo, C. F.；"A variational formulation of kinematic waves：basic theory and complex boundary conditions", Transp. Res. B, Vol. 39, No. 2, pp. 187〜196, 2005
11) Daganzo, C. F.；"A variational formulation of kinematic waves：Solution methods", Transp. Res. B, Vol. 39, No. 10, pp. 934〜950, 2005
12) Schönhof, M. and Helbing, D.；"Empirical features of congested traffic states and their implications for traffic modeling". Transp. Sci., Vol. 41, No. 2, pp. 135〜166, 2007
13) Bando, M., et al.；"Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation", Phys. Rev. E, Vol. 51, pp. 1035〜1042, 1995
14) Wilson, R. E. and Ward, J. A.；"Car-following models：fifty years of linear stability analysis—a mathematical perspective", Transport. Plan. Techn., Vol. 34, No. 1, pp. 3〜18, 2011
15) Nagel K., et al.；"Still flowing：Approaches to traffic flow and traffic jam modeling", Oper. Res., Vol. 51, No. 5, pp. 618〜710, 2003
16) Daganzo, C. F., et al.；"Possible explanations of phase transitions in highway traffic", Transp. Res. A, Vol. 33, pp. 365〜379, 1999
17) Daganzo, C. F.；"Remarks on traffic flow modeling and its applications", Traffic and Mobility, Springer, pp. 105〜115, 1999
18) Daganzo, C. F.；"Requiem for second-order fluid approximations of traffic flow", Transp. Res. B, Vol. 29, No. 4, pp. 277〜286, 1995
19) 和田健太郎 他；"Kinematic Wave 理論の近年の発展：変分理論とネットワーク拡張", 土木学会論文集 D3（土木計画学）, Vol. 73, No. 5, 2017（印刷中）
20) 和田健太郎 他；"Kinematic Wave 理論の近年の発展に関する研究解説", Working Paper, ResearchGate, 2017 https://www.researchgate.net/publication/313985673
21) Koshi, M., et al.；"Some findings and an overview on vehicular flow characteristics", Proc. of the 8th ISTTT, pp. 403〜426, 1983
22) Edie, L. C.；"Discussion of traffic stream measurements and definitions", Proc. of the 2nd International Symposium on the Theory of Traffic Flow, pp. 139〜154, 1963
23) Makigami, Y., et al.；"Three-dimensional representation of traffic flow", Transp. Sci., Vol. 5, No. 3, pp. 302〜313, 1971
24) Cassidy, M.；"Bivariate relations in nearly stationary highway traffic", Transp. Res. B, Vol. 32, No. 1, pp. 49〜59, 1998
25) Cassidy, M. J. and Coifman, B.；"Relation among average speed, flow, and density and analogous relation between density and occupancy", Transp. Res. Rec., Vol. 1951, pp. 1〜6, 1997
26) Kuwahara, M.；"Theory, solution method and applications of kinematic wave", Interdiscip. Inform. Sci., Vol. 21, No. 1, pp. 63〜75, 2015
27) Lebacque, J. P.；"Two-phase bounded-acceleration traffic flow model：Analytical solutions and applications", Transp. Res. Rec., Vol. 1852, pp. 220〜230, 2003
28) Yperman, I., et al.；"The link transmission model：An efficient implementation of the kinematic wave theory in traffic networks", Proc. of the 10th EWGT, 2005
29) Kuwahara, M. and Akamatsu, T.；"Dynamic user optimal assignment with physical queues for a many-to-many OD pattern", Transp. Res. B, Vol. 35, No. 5, pp. 461〜479, 2001
30) Jin, W.-L.；"Continuous formulations and analytical properties of the link transmission model", Transp. Res. B, Vol. 74, pp. 88〜103, 2015