紹 介

Kinematic Wave 理論の確率的な展開
Stochastic Extensions of Kinematic Wave Theory

日下部 貴 彦*
和 田 健太郎**

これまでの Kinematic Wave（KW）理論では一意に決定されたパラメータおよび初期条件・境界条件に基づいて構成される決定論的なアプローチでの解析方法が検討されてきている。近年，このような枠組みを拡張し，KW 理論に確率的な要素を導入する研究が始められている。確率的な KW 理論は，交通容量や需要を始めとした道路・交通条件の不確実性が，交通流のダイナミクスによって上下流の交通状態に与える影響を表現するものである。このような理論が構築されることで，現実に起こる交通現象の変動要因の特定を始めとして，不確実性の影響を考慮した交通制御や旅行時間信頼性等の LOS（Level of Service）の評価につながるものと期待されている。本稿では，近年提案されている確率的交通流モデルを紹介するとともに，その応用と現状の課題についてまとめる。

キーワード　マクロ交通流モデル　確率的交通流モデル　CTM　変分理論

1. はじめに

現実の交通流では，需要や交通容量を始めとした道路・交通条件がさまざまな要因によってばらつき，交通状態に影響している。このような道路・交通条件に作用し得るすべての因子を特定し，すべての交通流の現象を記述することは容易ではない。そのため，このような変動やばらつきを各条件の不確実性として捉え，その不確実性がもたらす交通流への影響を表現可能とする理論的枠組みが求められる。一方で，これまでの Kinematic Wave（KW）理論では一意に決定されたパラメータおよび初期条件・境界条件に基づいて構成される決定論的なアプローチでの解析方法が検討されてきており，このような不確実性を取り扱うことはできなかった。近年，上述の不確実性を取り扱う枠組みが注目され，確率的 KW 理論が構築されつつある。

交通流に関する不確実性を取り扱う際には，単純に地点ごとに起こる変動について記述するだけでは不十分であり，その上下流への不確実性の伝播を考慮する必要がある。このことは，例えば，何らかの要因によって交通容量が低下した場合に，下流での交通量に影響を与えるばかりでなく，需要が容量を上回れば衝撃波として上流の交通状態にも影響を与えることを考えれば明らかである。つまり，確率的交通流理論では，交通流のダイナミクスを考慮した不確実性の波及を記述する必要がある。

本稿では，KW 理論に基づく確率的な交通流の

*［正会員］ 東京大学空間情報科学研究センター講師（e-mail: t.kusakabe@csis.u-tokyo.ac.jp）
**［正会員］ 東京大学生産技術研究所助教（e-mail: wadaken@iis.u-tokyo.ac.jp）

モデルの基本的な性質を紹介するとともに，近年構築されつつあるいくつかのモデル化のアプローチおよび数値解析手法について紹介し，これらの応用と現状の課題についてまとめる。

2.　確率的交通流モデル

本章では，まず，KW モデルで，確率的な要素として扱う対象について 2.1 節で整理した上で，2.2 節では解析的な分析を通じて得られる確率的交通流の基本的な性質について述べる。Laval & Chilukuri[1] でも示されているように，単純な道路区間の設定であっても，交通流率・密度の確率分布を陽に扱うことは難しく，解析的に結果が得られるのは衝撃波の位置の分布に限られている。そのため，確率的交通流の分析で交通流率等の具体的な数値を扱うためには，数値解析的なアプローチをとる必要がある。2.3 節では，確率的交通流の数値解析のためのアプローチと提案されているモデルについて紹介する。

2.1　不確実性にかかわる要素

以降で示す確率的な交通流モデルでは，保存則（連続式）と交通流率・密度関係の二つの式から構成される KW モデルの以下の要素に確率的な変動があると仮定してモデル化を行う。

a. 確率的な初期条件・境界条件

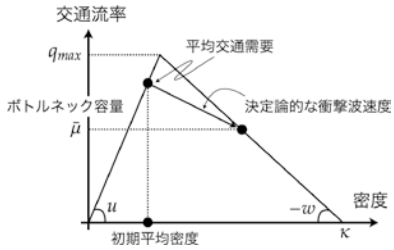
b. 確率的な流入出

c. 確率的な交通流率–密度関係（FD）

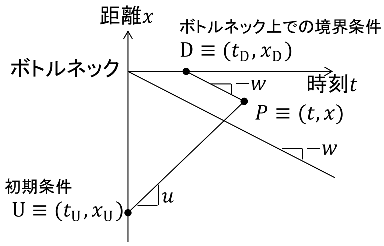
a は，モデルの解析時点での観測値に不確実性がある場合，つまり，初期条件や境界条件に確定的な条件を設定できない場合を表す。例えば，車両感知器など限定的な範囲での観測値をもとに区間全体の密度などの初期条件を設定する場合や将来需要のように不確実性がある初期条件・境界条件を用いる場合が想定される。

b は，保存則の成立に不確実性がある場合を示している。例えば，道路区間の途中に車が出入りできる区間や退避できる区間があり，それらの値を確定的に観測することができない場合などが想定できる。

c は，交通流率–密度関係が確率的に変動するものであり，図–1 の三角形の FD であれば，



図–1　想定する状況 FD と各パラメータ



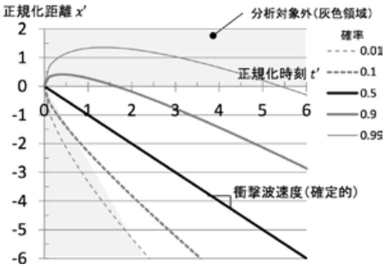
図–2　Laval & Chilukuri[1] の空間設定

Wave 速度 u，w，ジャム密度 κ，交通容量 q_{max} などのパラメータのいずれかが確率的に変動するものである。例えば，照度や気象などの影響等の環境的因子や個々の車両・運転者の特性などによる交通容量や速度–車間距離の関係等が不確実な変動として想定される[2]。

2.2　確率的 KW モデルの基本的性質

Laval & Chilukuri[1] は，図–2 のように最下流端にボトルネックのある一様な道路区間を対象に，初期条件，ボトルネック容量（最下流端の境界条件），そして，三角形 FD のパラメータが確率的に変動する際の「渋滞の分布」（時空間図上の各地点が渋滞流領域になる確率）を解析的に導出している。ここでは，初期条件が確率的に変動する場合を例として確率的な交通流の性質について述べる。

図–1 のように，ボトルネック容量（境界条件）を $\bar{\mu}$ とし，ボトルネック上流側の初期条件は，平均交通需要（交通流率）がボトルネック容量を超えるような平均密度に白色ノイズを加えたものとする。このとき，確定的な KW モデルでは FD 中に示す衝撃波が生じる。また，変分理論（VT: Variational Theory）によれば，時空間図上の任意の点 $P \equiv (t, x)$ の累積交通量 N_P は初期条件か



図–3　衝撃波の確率分布（ボトルネック位置 $x'=0$）

表–1　本稿で紹介する数値解析アプローチ一覧

	手法	確率化要素
Sumalee, et al.（2011）	CTM（SMM）	a, b, c
Jabari & Liu（2012）	CTM	c
Laval, et al.（2012）	VT（Newell）	a, c
Osorio & Flötteröd（2015）	VT（LTM）	a
和田ら（2016）	VT	a
高安ら（2016）	VT	a, c

ら求まる図–2 の U の累積交通量 N_U（注 1）と図中 D の累積交通量 N_D（境界条件）を用いて，厳密に求めることができる。すなわち，

$$N_P = \min\{N_U, N_D + (x - x_D)\kappa\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \ (1)$$

である（詳細は本特集の和田の解説の 3.2 節を参照）。$N_P = N_U$ のとき地点 P は（上流側の影響を受ける）自由流であり，そうでないとき（下流側の影響を受ける）渋滞流となる。

さて，以上の議論より，N_U が確率的に与えられているとき，地点 P が渋滞流である確率は，式（1）の第一項が第二項を上回る確率 $p(t, x)$，

$$p(t, x) = \Pr(N_U > N_D + (x - x_D)\kappa) \cdots\cdots\cdots \ (2)$$

として与えられる。このことは，衝撃波の位置を確率的に示すことと同義である。

図–3 は，衝撃波が現れる位置の確率を描いたものである（注 2）。その確率の特徴は以下の通りである：(i) 確率 0.5 の等高線（太い実線）が確定的な衝撃波と一致する；(ii) 各時刻に注目すると，ある渋滞確率（例えば 0.9）とそれに等しい非渋滞確率（i.e., $1 - p(t, x) = 0.9$）が現れる位置は確定的な衝撃波を中心として対称となる；(iii) 時間とともにその分布は広がるが，その増加率は低減する。ここで (iii) は，ボトルネック上流の各地点の状態が最終的には確定的な解（渋滞流）に収束することを意味している。また，分布形状や幅，収束速度は異なるものの，これらの性質はボトルネック容量が確率的な場合や FD パラメータがばらつく場合でも一般的に成立することが示されている。

以上の結果は，確率的な KW モデルは，交通流が定常的であり，ある程度時間を粗く見れば確定的なモデルと同等の解を導くことを示唆している。したがって，Level of Service（LOS）（旅行時間信頼性等）の評価や将来予測，交通制御への応用という意味でこのようなモデルは重要であると考えられる一方，さまざまな条件を“素朴”に確率的にすることは（例えば，本特集の瀬尾・柳原氏の解説にある拡張と異なり）KW モデルの挙動を“質的”に変えることにはつながらないようにも見える。モデルの確率化と重要な交通現象との関係は 4 章の最後に簡単に触れることとする。

2.3　モデリングとその解法アプローチの概要

確率的な KW モデルを数値的に解析するアプローチとしては，Cell Transmission Model（CTM）に基づくものと，VT に基づくものが現在提案されている。以下ややテクニカルとなるが，その概要を示す（紹介するモデルは表–1 を参照）。

1）CTM に基づく確率化

Sumalee, et al.[3] で提案されている Stochastic Cell Transmission Model（SCTM）は，取扱いが煩雑な CTM の非線形性を回避するために CTM の区分線形近似である Switching Mode Model（SMM）[4] を用いて確率化を行っている。より具体的には，セル境界を通過する交通流率が線形で表せる五つのモードを定義する（モードは上下流セルの状態，つまり，自由流，渋滞流の組合せや密度等で決まる）。この五つのモードが確率的に起こると仮定し，各モードの生起する確率分布の混合分布（i.e., 各確率分布の重み付け和）としてセル密度の確率分布を近似するものである。このモデルは，上述した a–c すべての要素の確率的取扱いが検討されている点が特徴である。

一方，KW モデルの本来持つ非線形性を排除しており，（以降で紹介する）KW モデルの直接の確率化とは，当然その挙動が異なることが予想される。なお，そのネットワーク拡張は Zhong, et al.[5] で提示されている。

Jabari & Liu[6] ではセル境界を流れる交通流率（要素 c）が車頭時間のばらつきにより変動することを仮定した確率的な CTM を提案している。このモデルでは，車頭時間が確率変数として明示的に扱われており，その期待値のダイナミクス（注3）が確定的な CTM に収束することが証明されている。また，セル境界への車両の到着が（計算過程で得られる）交通流率の期待値をパラメータとするポアソン過程で表現されるとした場合，このモデルはガウス過程として近似できることが示されている[7]。したがって，平均的な交通状態（密度等）とその分散が逐次的に計算可能である。

2）VT による確率化

Laval ら[8] では，Newell の three-detector method[9] を拡張し，2 台の検知器に挟まれた一様な区間における確率的な累積交通量を厳密に求める方法を提案している。この研究では，a. 境界条件および c. FD を確率的に扱っており，前者は検知器データのエラーを，後者は，FD の Wave 速度，容量が確率的に変動する場合を想定している。

Osorio & Flötteröd[10] では，（一様な道路区間における）Newell の KW 理論[9] の計算法として提案された Link Transmission Model（LTM）[11] に基づく確率モデルを提案している。このモデルでは上下流端の境界条件が確率的に変動するとし，下流端での待ち行列台数，上流端での受け入れ可能台数，リンク内を移動中の車両台数に相当する変数が遷移する過程を KW 理論に整合的なマルコフ過程を用いて表現している。そしてこれら状態変数の同時確率分布を近似的に計算する手法を構築し，その精度が極めて高いことを示している。このモデルはネットワーク交通流モデルのサブモデルという色合いが強く，そのネットワーク拡張も近年示されている[12]。

和田ら[13] は，信号交差点を多数含む道路路線の期待遅れを評価する目的で，上流端への需要の到着流率がポアソン分布に従う VT を考察している。そして，下流端の確率的な累積台数の期待値と分散を近似的に計算する手法を構築している。ここでは，境界条件を確率的とした VT の解が，時空間ネットワーク上の Probit 型の最短経路問題になることに注目し，Probit モデルの解析的近似法として知られる Clark 近似を用いている。そして，その近似精度が極めて高いことが示されている。高安ら[14] では，この手法を FD がばらつく場合に拡張している。

3.　課　　題

3.1　FD の確率的な取扱い

本特集の塩見氏の論説で詳しく述べられているように，FD の設定は KW モデルの要である。しかし，Jabari & Liu[6] は例外として，上述のモデルではその確率的な取扱いには必ずしも大きな注意は払われていない。例えば，Sumalee, et al.[3] では，検知器データから得られる交通流率−密度のデータから各 FD パラメータを独立な正規分布としてキャリブレーションしているが，次の二つの点で問題がある。

第一に，KW 理論で想定する FD はあくまで定常状態における交通流率−密度関係であるにもかかわらず[15]，定常状態以外のデータも含めてキャリブレーションに用いている点である。現実の交通流率−密度関係には多くのばらつきが見られるが，それらは自由流/渋滞流の遷移過程のデータも多く含まれている。これらの遷移データは KW モデルで予測/表現すべき“結果”であり，そのダイナミクスを支配する“要因”である FD に反映させるべきではない。つまり，上述のようにキャリブレーションした FD パラメータの分散は観測地点の道路構造・車両構成等に起因するばらつきだけではなく，交通需要等に起因するその地点の交通状態のばらつきを含んでしまっている。

第二は，よりテクニカルな点ではあるが，正規分布の仮定である。この仮定は，（稀ではあるが）FD パラメータが負になり得ることを意味する。またそれを避けるために切断分布を用いる場合にもバイアスが含まれる恐れがある。ただし，車両

挙動や道路条件の確率変動そのものや，これらとFDの確率変動との関係も必ずしも明らかではなく，どういう道路でどのようなFDのパラメータ分布を想定すべきかについて現在のところ確立された方法はない。一つの興味深い取組みとして，車両挙動の異質性から確率的なFDを導出する研究[16]がある。

3.2 旅行時間分布の算出

先にも述べたように，確率的交通流モデルの一つの重要な応用はLOS評価であろう。しかし，前章で紹介したモデルは，いずれもある時空間上の点の密度や累積交通量などの交通状態量の確率分布を評価・計算するものであり，LOSの代表例である旅行時間の分布はそこから直接導き出すことはできない。なぜなら，これらのモデルからは車両１台１台が取り得る軌跡の確率分布は得られないためである。

例えば，確定的なモデルの場合，マクロな交通状態量が決まり，かつ，First-In-First-Out条件が仮定できれば，2地点の累積交通量が等しくなる時刻差を旅行時間とすることができる。しかし，確率的なモデルの場合，2地点の期待累積台数が等しくなる時刻差は，各車両の確率的な旅行時間を平均したものとなるとは限らない。そのため，Sumaleeら[17]では，各時刻の累積交通量の確率分布を用い，2地点の累積交通量が一定の分布幅に収まる確率を求め，旅行時間の分布を近似的に求めるなどの工夫を行っている。

4. おわりに

本稿では，確率的な交通流モデルについて紹介するとともにそれらの課題を示した。今後，このようなモデルが発展することで，不確実性を考慮したLOS評価や交通制御，観測の精緻化等に役立つものと考えられる。例えば，Sumaleeら[17]に示されているような旅行時間の信頼性の評価は，ばらつきによる道路利用者の損失を評価するうえで重要な考え方である[18]。確率的交通流モデルが構築されることで旅行時間の確率分布を演繹的に導出できるようになれば，現状のデータがない新規の道路計画等での信頼性の評価も可能となると期待できる。さらに，Wada, et al.[19]で示されているように確率的な交通状態の把握や予測は，よりロバストな交通制御でも重要な役割を果たすだろう。

交通流の観測値には多分に誤差が含まれているが，これらの誤差についてモデリングし観測値からより精緻な交通状態を推定する際にも，確率的交通流モデルは有用であるだろう。このような交通状態推定では，一般に状態空間モデルが用いられるが，Jabari & Liuの研究[7]のようにシステムモデルに交通流のダイナミクスを考慮した確率的交通流モデルを用いることでより精緻なサンプルパスを表現できる可能性がある。

最後に確率的な交通流モデルのさらなる可能性として，KWモデルへの適切な確率的要素の導入により粗密波（or stop-and-go交通）の発生／伝播を説明するLaval, et al.[20]の研究を紹介する。この研究では，本特集の瀬尾氏が紹介したKWモデルと等価なNewellの単純追従モデルの自由走行を表す項，つまり，次式の第一項，

$$X_{n+1}(t) = \min\left\{ \begin{array}{c} X_{n+1}(t-\tau) + \epsilon_{n+1}(\tau), \\ X_n(t-\tau) - \sigma \end{array} \right\} \cdots \quad (3)$$

の（車両の加速挙動を表す）$\epsilon_{n+1}(\tau)$を適当な確率変数とすれば，現実的な粗密波の振動周期や振動幅を再現できることを示した。ここで，$X_n(t)$は車両nの位置，τ，σは速度−車間距離関係を表すFDのパラメータである。この結果は，KWモデルに基づく交通流モデルの可能性を広げることに加え，交通流の不安定性を説明するのに必ずしも（追従モデルのような）“モデル”の不安定性を必要としないことを示唆するという意味で興味深いと言えよう（注4）。

脚　注

（注1）ボトルネック位置での初期累積交通量を$N(0, x_D) = 0$としている。

（注2）図−3は適当な時間単位，空間単位（問題のパラメータに依存する）で基準化した無次元の時空間図を表している。

（注3）多数回のシミュレーションによるサンプルパスの（アンサンブル）平均に相当する。

（注4）ただし，同様の結論は，確率的なセルオートマトンモデル[21]の文脈では古くから知られており，全く新しい知見

というわけではない。

参 考 文 献

1) Laval, J. and Chilukuri, B. R.；"The distribution of congestion on a class of stochastic kinematic wave models", Transp. Sci., Vol. 48, No. 2, pp. 217～224, 2014
2) 越正毅, 桑原雅夫, 赤羽弘和；"高速道路のトンネル, サグにおける渋滞現象に関する研究", 土木学会論文集, No. 458/IV-18, pp. 65～71, 1993
3) Sumalee, A., et al.；"Stochastic cell transmission model (SCTM)：A stochastic dynamic traffic model for traffic state surveillance and assignment", Transp. Res. B, Vol. 45, No. 3, pp. 507～533, 2011
4) Muñoz, L., et al.；"Traffic density estimation with the cell transmission model", Proc. of the American Control Conference, pp. 3750～3755, 2003
5) Zhong, R. X., et al.；"Stochastic cell transmission model for traffic network with demand and supply uncertainties", Transportmetrica A, Vol. 9, No. 7, pp. 567～602, 2013
6) Jabari, S. E. and Liu, H. X.；"A stochastic model of traffic flow：Theoretical foundations", Transp. Res. B, Vol. 46, No. 1, pp. 156～174, 2012
7) Jabari, S. E. and Liu, H. X.；"A stochastic model of traffic flow：Gaussian approximation and estimation", Transp. Res. B, Vol. 47, pp. 15～41, 2013
8) Laval, J., et al.；"Stochastic extension of Newell's three-detector method", Transp. Res. Rec., Vol. 2315, pp. 73～80, 2012
9) Newell, G. F.；"A simplified theory of kinematic waves in highway traffic, part I：General theory；part II：Queueing at freeway bottlenecks；part III：Multi-destination flows", Transp. Res. B, Vol. 27, No. 4, pp. 281～313, 1993
10) Osorio, C. and Flötteröd, G.；"Capturing dependency among link boundaries in a stochastic dynamic network loading model", Transp. Sci., Vol. 49, No. 2, pp. 420～431, 2015
11) Yperman, I., et al.；"The link transmission model：An efficient implementation of the kinematic wave theory in traffic networks", Proc. of the 10th EWGT, 2005
12) Flötteröd, G. and Osorio, C.；"Stochastic network link transmission model", Transp. Res. B, Vol. 102, pp. 180～209, 2017
13) 和田健太郎, 臼井健人, 大口敬, 井料(浅野)美帆；"交通流の変分原理に基づく系統信号路線の期待遅れ評価法", 土木学会論文集 D3(土木計画学), Vol. 73, No. 1, pp. 85～96, 2017
14) 高安杏奈, 原祐輔, 和田健太郎, 桑原雅夫；"入力データの確率変動を考慮した交通状態推定—Variational Theory に基づいた解析と検証—", 土木計画学研究・講演集, Vol. 53, pp. 1232～1239, 2016
15) 瀬尾亨, 日下部貴彦, 朝倉康夫；"車両軌跡に基づく流率密度関係の推定法—基本的な枠組みと数値実験", 交通工学論文集, Vol. 2, No. 2(特集号), pp. A_1～A_10, 2016
16) Jabari S. E.；"A probabilistic stationary speed-density relation based on Newell's simplified car-following model", Transp. Res. B, Vol. 68, pp. 205～223, 2014
17) Sumalee, A., et al.；"Dynamic stochastic journey time estimation and reliability analysis using stochastic cell transmission model：Algorithm and case studies", Transp. Res. C, Vol. 35, pp. 263～285, 2013
18) 中山晶一朗 他；"道路交通の信頼性評価", コロナ社, 2014
19) Wada, K., et al.；"An optimization modeling of coordinated traffic signal control based on the variational theory and its stochastic extension", Proc. of the 22nd ISTTT, pp. 624～644, 2017
20) Laval, J., et al.；"A parsimonious model for the formation of oscillations in car-following models", Transp. Res. B, Vol. 70, pp. 228～238, 2014
21) Nagel, K. and Schreckenberg, M.；"A cellular automaton model for freeway traffic", Journal de Physique I, Vol. 2, No. 12, pp. 2221～2229, 1992