

令和5年度

筑波大学大学院
システム情報工学研究群
社会工学学位プログラム
サービス工学学位プログラム
博士前期課程（一般入学試験 8月期）
試験問題 専門科目

令和4年8月25日

筑波大学大学院 システム情報工学研究群
博士前期課程 社会工学学位プログラム サービス工学学位プログラム
令和5年度入学試験 学力検査問題
令和4年8月25日実施

専門科目

- (1) この冊子には下表に示す3つの出題分野の問題が含まれています。社会工学学位プログラムの受験者はその中から1つの出題分野を選択して解答しなさい。サービス工学学位プログラムの受験者は数学の問題に解答しなさい。
- (2) 各答案用紙の上部に、必ず受験番号を記入しなさい。
- (3) 解答の初めに、必ず出題分野と問題番号（例えば、数学 I.）を示しなさい。問題ごとに別の答案用紙に解答しなさい。

出題分野
数学
ミクロ経済学
都市・地域計画

University of Tsukuba
Graduate School of Science and Technology
Degree Programs in Systems and Information Engineering
Policy and Planning Sciences / Service Engineering
ENTRANCE EXAMINATION
August 25, 2022

Major Subjects

- (1) This package contains problems from the 3 subject areas shown in the following table. Applicants for the Master's Program in Policy and Planning Sciences should choose one subject area to answer. Applicants for the Master's Program in Service Engineering should answer the problems in Mathematics.
- (2) Write your application number on the top of each answer sheet.
- (3) Write the subject area and the problem number (e.g., Mathematics I.) on the top of your answer. Use a separate answer sheet for each problem.

Subject Areas
Mathematics
Microeconomics
Urban and Regional Planning

数学

問題ⅠとⅡの両方に答えよ．問題ごとに別々の解答用紙を使用せよ．
以下では，実数全体の集合を \mathbf{R} とする．

I. 以下の問 [1] 及び [2] に答えよ．

[1] 平面 \mathbf{R}^2 上で定義された次の関数 $f(x, y)$ について，以下の問 (1.1)–(1.4) に答えよ．

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^4} & ((x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき}), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0) \text{ のとき}). \end{cases}$$

(1.1) 関数 $f(x, y)$ は連続であることを示せ．

(1.2) 関数 $f(x, y)$ は原点 $(0, 0)$ で，両変数に関して偏微分可能であることを示せ．

(1.3) $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき，関数 $f(x, y)$ の偏導関数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ を求めよ．

(1.4) 偏導関数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ はともに原点 $(0, 0)$ において連続でないことを示せ．

[2] ガンマ関数

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx, \quad s > 0$$

について，以下の問 (2.1)–(2.3) に答えよ．

(2.1) 公式 $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を利用して， $\Gamma(\frac{1}{2})$ を求めよ．

(2.2) $s > 0$ のとき，部分積分法を用いることにより， $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ を示せ．

(2.3) 各自然数 n に対して， $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ を求めよ．

II. 以下の問 [1] 及び [2] に答えよ.

[1] 平面 \mathbf{R}^2 上の 3 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (1, 1)$ は一直線上の点でないとする. $x_1, x_2, 1$ が互いに相異なる実数であるとき, 以下の問 (1.1)–(1.3) に答えよ.

$$(1.1) \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ を示せ.}$$

$$(1.2) \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ を示せ.}$$

$$(1.3) \text{ 3 点 } (x_1, y_1), (x_2, y_2), (1, 1) \text{ を通る曲線が } y = ax^2 + bx + c \text{ となる条件と } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ の関係を理由とともに説明せよ.}$$

[2] 2 次形式 $5x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 8xy + 4xz + 4yz$ について, 以下の問 (2.1)–(2.3) に答えよ.

$$(2.1) \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ とするとき, } 5x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 8xy + 4xz + 4yz = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} \text{ となる対称行列 } A \text{ を求めよ. ただし, } {}^t\mathbf{x} \text{ は } \mathbf{x} \text{ の転置である.}$$

$$(2.2) D = P^{-1}AP \text{ となる直交行列 } P \text{ と対角行列 } D \text{ を求めよ.}$$

$$(2.3) \mathbf{x} = P\mathbf{x}', \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \text{ とおいて, 2 次形式 } 5x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 8xy + 4xz + 4yz \text{ の標準形を求めよ.}$$

Mathematics

Answer both problems I and II. Use a separate answer sheet for each problem.

In what follows, let \mathbf{R} be the set of all real numbers.

I. Answer the following sub-problems [1] and [2].

[1] Answer the questions (1.1)–(1.4) about the following function $f(x, y)$ defined on the plane \mathbf{R}^2 .

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^4} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)). \end{cases}$$

(1.1) Show that the function $f(x, y)$ is continuous.

(1.2) Show that the function $f(x, y)$ is partially differentiable at the origin $(0, 0)$, with respect to both x and y .

(1.3) Find the partial derivatives $f_x(x, y)$ and $f_y(x, y)$ of the function $f(x, y)$ at any point $(x, y) \neq (0, 0)$.

(1.4) Show that both partial derivatives $f_x(x, y)$ and $f_y(x, y)$ are not continuous at the origin $(0, 0)$.

[2] Answer the following questions (2.1)–(2.3) about the Gamma function defined as

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx, \quad s > 0.$$

(2.1) Find the value of $\Gamma(\frac{1}{2})$ by using the known formula $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(2.2) Show that $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ holds for $s > 0$ by means of integration by parts.

(2.3) Find the value of $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ for each natural number n .

II. Answer the following sub-problems [1] and [2].

[1] Let $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (1, 1)$ be three non-collinear points in the plane \mathbf{R}^2 , where $x_1, x_2, 1$ are three distinct real numbers. Answer the following questions (1.1)–(1.3).

(1.1) Show that $\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

(1.2) Show that $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

(1.3) Explain the relationship between the condition that the curve passing through the three points $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ and $(1, 1)$ is $y = ax^2 + bx + c$ and the condition that

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ together with your reason.}$$

[2] Answer the following questions (2.1)–(2.3) about the quadratic form

$$5x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 8xy + 4xz + 4yz.$$

(2.1) Find a symmetric matrix A so that $5x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 8xy + 4xz + 4yz = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$, where

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ and } {}^t\mathbf{x} \text{ is the transpose of } \mathbf{x}.$$

(2.2) Find an orthogonal matrix P and a diagonal matrix D so that $D = P^{-1}AP$.

(2.3) Let $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$. Find the canonical form of the quadratic form $5x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 8xy + 4xz + 4yz$.

ミクロ経済学

問題 I から III 全てに答えよ. 問題ごとに別々の解答用紙を使用せよ.

I. 完全競争のもとで, 労働と資本を用いて生産を行う企業を考える. この企業の生産関数は

$$y = L^a K^b, \quad a > 0, b > 0$$

によって与えられる. ここで, y は生産量, L は労働量, K は資本量である. $w > 0$ は賃金 (労働の価格), $r > 0$ は資本のレンタル価格, $p > 0$ は生産物価格であるとする. 企業は短期において資本量を変更できないが, 長期では資本量を変更できるものとする. また, 企業は利潤を最大化すると仮定する.

1. 以下の問 (1) から (3) に答えよ.

- (1) 労働の限界生産性逓減が成立するためには, 定数 a はどのような条件を満たせばよいか.
- (2) 規模に関して収穫逓減, 収穫一定, 収穫逓増が成立するためには, それぞれ定数 a と b はどのような条件を満たせばよいか.
- (3) 規模に関して収穫一定を仮定する. 資本量 K が固定されている短期において, 労働分配率 wL/py を求めよ.

2. $a = 1/3, b = 1/3, w = 1, r = 1$ とする. 以下の問 (1) から (5) に答えよ.

- (1) 短期費用関数を y と K を用いて表せ.
- (2) 資本量が $K = 3$, 生産物価格が $p = 9$ であるとき, 企業は短期においてどれだけ生産するか.
- (3) 企業が $y = 4$ だけ生産するとき, 長期における最適な資本量と長期費用を求めよ.
- (4) 生産物価格が $p = 3$ であるとき, 企業は長期においてどれだけ生産するか.
- (5) 問 (4) の生産を行うために, 長期において企業が用いる労働量と資本量を求めよ.

II. 公共財と私的財の 2 財を消費する個人 A, B, C からなる社会について考える. 各個人 $i = A, B, C$ は x 単位の公共財と m_i 単位の私的財を消費した時に効用 $u_i(x, m_i) = 2\theta_i x^{\frac{1}{2}} + m_i$ を得る (ただし以下では $\theta_i (> 0)$ を個人 i のタイプと呼ぶ. ゲームの文脈では戦略とも呼ぶ). 政府は 1 単位の私的財を用いて 1 単位の公共財を供給することができるとする. 単純化のために, 各個人 i が初期に保有している私的財の量は 0 であるとする. 以下では \mathbb{R} は実数の集合を表している.

- (1) 公共財の最適供給条件 (サミュエルソン条件) について述べた文を以下の①–④から選べ.
- ① 各個人の限界代替率が公共財価格と等しくなる.
 - ② 各個人の限界代替率の和が限界変形率に一致する.
 - ③ 各個人の限界効用の逆数が公共財価格と等しくなる.
 - ④ 各個人の限界効用の逆数の和が限界変形率に一致する.
- (2) サミュエルソン条件を導出せよ.
- (3) 以下の3ステップで定義されるリンダール・メカニズムによって公共財供給水準および私的財配分を決定する場合に、各個人 $i = A, B, C$ が直面する問題を①–⑨から選べ.

リンダール・メカニズム

- ステップ1：各個人が自身のタイプ $\theta_i (> 0)$ を政府に申告する.
- ステップ2：公共財供給水準 x のうち個人 i が負担する (政府に提供する) 私的財の割合を α_i とおいて、各個人の公共財に対する需要 $D_i(\alpha_i)$ を計算する (ただし、 $0 < \alpha_A, \alpha_B, \alpha_C < 1$ かつ $\alpha_A + \alpha_B + \alpha_C = 1$).
- ステップ3： $D_A(\alpha_A^*) = D_B(\alpha_B^*) = D_C(\alpha_C^*)$ となる $\alpha_A^*, \alpha_B^*, \alpha_C^*$ を求めて、リンダール・メカニズムの公共財供給水準 x^L を $x^L = D_A(\alpha_A^*) (= D_B(\alpha_B^*) = D_C(\alpha_C^*))$ とする. 同時に、政府は各個人 i から私的財を $\alpha_i^* x^L$ 単位徴収する.

- ① $\max u_i(x, m_i)$ subject to $\alpha_i x + \alpha_i m_i = 0$
- ② $\max u_i(x, m_i)$ subject to $\alpha_i + x + m_i = 0$
- ③ $\max u_i(x, m_i)$ subject to $x + \alpha_i m_i = 0$
- ④ $\max u_i(x, m_i)$ subject to $\alpha_i x + m_i = 0$
- ⑤ $\max u_i(x, m_i)$
- ⑥ $\min u_i(x, m_i)$ subject to $\alpha_i x + \alpha_i m_i = 0$
- ⑦ $\min u_i(x, m_i)$ subject to $\alpha_i + x + m_i = 0$
- ⑧ $\min u_i(x, m_i)$ subject to $x + \alpha_i m_i = 0$
- ⑨ $\min u_i(x, m_i)$ subject to $\alpha_i x + m_i = 0$

- (4) リンダール・メカニズムによって公共財供給水準および私的財配分を決定する場合に、各個人のタイプ申告が $(\theta_A, \theta_B, \theta_C)$ であるときの公共財供給水準を①–⑨から選べ。

- ① $(\theta_A^{\frac{1}{2}} + \theta_B^{\frac{1}{2}} + \theta_C^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$
- ② $(\theta_A^{\frac{1}{2}} + \theta_B^{\frac{1}{2}} + \theta_C^{\frac{1}{2}})$
- ③ $(\theta_A^{\frac{1}{2}} + \theta_B^{\frac{1}{2}} + \theta_C^{\frac{1}{2}})^2$
- ④ $(\theta_A + \theta_B + \theta_C)^{\frac{1}{2}}$
- ⑤ $(\theta_A + \theta_B + \theta_C)$
- ⑥ $(\theta_A + \theta_B + \theta_C)^2$
- ⑦ $(\theta_A^2 + \theta_B^2 + \theta_C^2)^{\frac{1}{2}}$
- ⑧ $(\theta_A^2 + \theta_B^2 + \theta_C^2)$
- ⑨ $(\theta_A^2 + \theta_B^2 + \theta_C^2)^2$

- (5) 真のタイプが $(\theta_A^*, \theta_B^*, \theta_C^*)$ で与えられているとする。このときにリンダール・メカニズムによって公共財供給水準および私的財配分を決定する状況を戦略形ゲームとして表現したい。プレイヤーの集合を $\{A, B, C\}$ 、各プレイヤー i の戦略集合を $S_i = \{\theta_i | \theta_i > 0\}$ とした時に、利得関数 $\pi^L : S_A \times S_B \times S_C \rightarrow \mathbb{R}^3$ はどのように表されるか、以下の①–⑨から選べ。

- ① 各 $i = A, B, C$ に対して $\pi_i^L(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (\theta_i^* - \theta_i)(\theta_A + \theta_B + \theta_C)^{\frac{1}{2}}$
- ② 各 $i = A, B, C$ に対して $\pi_i^L(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (\theta_i^* - \theta_i)(\theta_A + \theta_B + \theta_C)$
- ③ 各 $i = A, B, C$ に対して $\pi_i^L(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (\theta_i^* - \theta_i)(\theta_A + \theta_B + \theta_C)^2$
- ④ 各 $i = A, B, C$ に対して $\pi_i^L(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (2\theta_i^* - \theta_i)(\theta_A + \theta_B + \theta_C)^{\frac{1}{2}}$
- ⑤ 各 $i = A, B, C$ に対して $\pi_i^L(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (2\theta_i^* - \theta_i)(\theta_A + \theta_B + \theta_C)$
- ⑥ 各 $i = A, B, C$ に対して $\pi_i^L(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (2\theta_i^* - \theta_i)(\theta_A + \theta_B + \theta_C)^2$
- ⑦ 各 $i = A, B, C$ に対して $\pi_i^L(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (\theta_i^* - \theta_i)^2(\theta_A + \theta_B + \theta_C)^{\frac{1}{2}}$
- ⑧ 各 $i = A, B, C$ に対して $\pi_i^L(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (\theta_i^* - \theta_i)^2(\theta_A + \theta_B + \theta_C)$
- ⑨ 各 $i = A, B, C$ に対して $\pi_i^L(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (\theta_i^* - \theta_i)^2(\theta_A + \theta_B + \theta_C)^2$

- (6) 以下の文章の空欄 (a)–(c) にあてはまる語を①–⑧からそれぞれ選べ。同じ選択肢を複数回選ぶことを妨げない。

正直申告の戦略プロファイル $(\theta_A^*, \theta_B^*, \theta_C^*)$ がナッシュ均衡かどうかを判定するためには、他の戦略に変更することで利得が増加するプレイヤーがいるかどうかを確認すればよい。すなわち、各個人 i が他のいかなる戦略 θ_i に表明を変更したとしても (a) が成り立っているならば $(\theta_A^*, \theta_B^*, \theta_C^*)$ はナッシュ均衡である。仮に与えられた真のタイプが $(\theta_A^*, \theta_B^*, \theta_C^*) = (2, 4, 8)$ であったとすると、戦略プロファイル $(\theta_A^*, \theta_B^*, \theta_C^*)$ はナッシュ均衡 (b)。また、真のタイプが $(\theta_A^*, \theta_B^*, \theta_C^*) = (2, 2, 2)$ であった場合には戦略プロファイル $(\theta_A^*, \theta_B^*, \theta_C^*)$ はナッシュ均衡 (c)。

- ① $\pi_i^L(\theta_A^*, \theta_B^*, \theta_C^*) \geq \pi_i^L(\theta_i, \theta_{-i}^*)$
- ② $\pi_i^L(\theta_A^*, \theta_B^*, \theta_C^*) > \pi_i^L(\theta_i, \theta_{-i}^*)$
- ③ $\pi_i^L(\theta_A^*, \theta_B^*, \theta_C^*) = \pi_i^L(\theta_i, \theta_{-i}^*)$
- ④ $\pi_i^L(\theta_A^*, \theta_B^*, \theta_C^*) \neq \pi_i^L(\theta_i, \theta_{-i}^*)$
- ⑤ $\pi_i^L(\theta_A^*, \theta_B^*, \theta_C^*) \leq \pi_i^L(\theta_i, \theta_{-i}^*)$
- ⑥ $\pi_i^L(\theta_A^*, \theta_B^*, \theta_C^*) < \pi_i^L(\theta_i, \theta_{-i}^*)$
- ⑦ である
- ⑧ でない

注意：上記①–⑥において $(\theta_i, \theta_{-i}^*)$ という記号は $(\theta_A^*, \theta_B^*, \theta_C^*)$ におけるプレイヤー i の戦略を θ_i に置き換えた戦略プロファイルを表している．例えば， $(\theta_B, \theta_{-B}^*) = (\theta_A^*, \theta_B, \theta_C^*)$ である．

- (7) 問(5)において，リンダール・メカニズムを以下の VCG メカニズムに置き換えた場合に，利得関数 $\pi^{VCG} : S_A \times S_B \times S_C \rightarrow \mathbb{R}^3$ はどのように表されるか，以下の①–⑧から選べ．

VCG メカニズム

- 公共財供給水準についてはリンダール・メカニズムと全く同様の計算を通じて x^L と定める．各個人 i は公共財供給水準 x^L に必要な私的財のうち，他の個人が公共財消費から得る効用を差し引いた残りを負担する．すなわち，政府は各個人 i から私的財を $(x^L - \sum_{j \neq i} 2\theta_j x^{L\frac{1}{2}})$ 単位徴収する．

- ① 各 $i = A, B, C$ に対して $\pi_i^{VCG}(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (\theta_i^* - \theta_i + \sum_{j \neq i} \theta_j)(\theta_A + \theta_B + \theta_C)^{\frac{1}{2}}$
- ② 各 $i = A, B, C$ に対して $\pi_i^{VCG}(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (\theta_i^* - \theta_i + \sum_{j \neq i} \theta_j)(\theta_A + \theta_B + \theta_C)$
- ③ 各 $i = A, B, C$ に対して $\pi_i^{VCG}(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (\theta_i^* - \theta_i + \sum_{j \neq i} \theta_j)(\theta_A + \theta_B + \theta_C)^2$
- ④ 各 $i = A, B, C$ に対して $\pi_i^{VCG}(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (2\theta_i^* - \theta_i + \sum_{j \neq i} \theta_j)(\theta_A + \theta_B + \theta_C)^{\frac{1}{2}}$
- ⑤ 各 $i = A, B, C$ に対して $\pi_i^{VCG}(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (2\theta_i^* - \theta_i + \sum_{j \neq i} \theta_j)(\theta_A + \theta_B + \theta_C)$
- ⑥ 各 $i = A, B, C$ に対して $\pi_i^{VCG}(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (2\theta_i^* - \theta_i + \sum_{j \neq i} \theta_j)(\theta_A + \theta_B + \theta_C)^2$
- ⑦ 各 $i = A, B, C$ に対して $\pi_i^{VCG}(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (\theta_i^* - \theta_i + \sum_{j \neq i} \theta_j)^2(\theta_A + \theta_B + \theta_C)^{\frac{1}{2}}$
- ⑧ 各 $i = A, B, C$ に対して $\pi_i^{VCG}(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (\theta_i^* - \theta_i + \sum_{j \neq i} \theta_j)^2(\theta_A + \theta_B + \theta_C)$

⑨ 各 $i = A, B, C$ に対して $\pi_i^{VCG}(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (\theta_i^* - \theta_i + \sum_{j \neq i} \theta_j)^2 (\theta_A + \theta_B + \theta_C)^2$

(8) 問 (7) のゲームでは、他プレイヤーの申告する戦略が何であるかに関わらず正直申告戦略 θ_i^* が i の利得を最大化する。このような戦略を何というか答えよ。

III. 競争均衡において各消費者の限界代替率の間にはどのような関係が成り立つか説明し、その含意を述べよ。全体で 200 字程度となるように記述すること。

Microeconomics

Answer all problems I-III. Use a separate answer sheet for each problem.

- I. Consider a firm that uses labor and capital for production under perfect competition. The production function of this firm is given by

$$y = L^a K^b, \quad a > 0, b > 0$$

where y is the amount of output, L is the amount of labor, and K is the amount of capital. Assume that $w > 0$ is the wage (price of labor), $r > 0$ is the rental price of capital, and $p > 0$ is the price of output. Assume that the firm cannot change the amount of capital in the short run, while the firm can change it in the long run. Assume that the firm maximizes its profits.

1. Answer the following questions (1)–(3).
 - (1) For diminishing marginal product of labor to hold, what conditions must be satisfied for the parameter a ?
 - (2) For decreasing returns to scale, constant returns to scale, and increasing returns to scale to hold, what conditions must be satisfied for the parameters a and b ?
 - (3) Assume constant returns to scale. In the short run which the amount of capital is fixed, find the labor share wL/py when the firm's profit is maximized.
2. Assume that $a = 1/3$, $b = 1/3$, $w = 1$, and $r = 1$. Answer the following questions (1)–(5).
 - (1) Express the short-run cost function using y and K .
 - (2) How much does the firm produce in the short run when the amount of capital is $K = 3$ and the price of output is $p = 9$?
 - (3) Find the optimal amount of capital and the long-run cost when the firm produces $y = 4$.
 - (4) How much does the firm produce in the long run when the price of output is $p = 3$?
 - (5) Find the amount of labor and capital that the firm uses in the long run to produce the amount of output in question (4).

II. Let A, B and C be individuals who consume a public good and a private good. Each individual $i = A, B, C$ has a utility function $u_i(x, m_i) = 2\theta_i x^{\frac{1}{2}} + m_i$, where x denotes the level of the public good provision, m_i does the amount of the private good for individual i , and $\theta_i > 0$ does the type of individual i . We also call θ_i the strategy of i depending on the context. Suppose that the government can supply a unit of public good by using a unit of private good donated by individuals. For simplicity, we assume that each individual initially owns 0 unit of the private good. In the following, \mathbb{R} denotes the set of real numbers.

- (1) Choose the correct answer from ①–④ that refers to the Samuelson rule, a condition for the optimal provision of the public good.
 - ① The marginal rate of substitution of each individual coincides with the price of the public good.
 - ② The sum of marginal rates of substitution of individuals coincides with the marginal rate of transformation.
 - ③ The reciprocal of the marginal utility of each individual coincides with the price of the public good.
 - ④ The sum of the reciprocals of the marginal utilities of individuals coincides with the marginal rate of transformation.
- (2) Derive the Samuelson rule.
- (3) Choose the correct answer from ①–④ that refers to the problem individual $i = A, B, C$ faces under the Lindahl mechanism below.

Lindahl mechanism

- Step 1: Each individual submits his/her type $\theta_i > 0$ to the government.
- Step 2: Letting α_i be the share of the cost of public good provision that individual i must bear, his/her demand for the public good $D_i(\alpha_i)$ is calculated. Note that $0 < \alpha_A, \alpha_B, \alpha_C < 1$ and $\alpha_A + \alpha_B + \alpha_C = 1$.
- Step 3: Let $\alpha_A^*, \alpha_B^*, \alpha_C^*$ be such that $D_A(\alpha_A^*) = D_B(\alpha_B^*) = D_C(\alpha_C^*)$. Set the level of public good provision as $x^L := D(\alpha_A^*) (= D(\alpha_B^*) = D(\alpha_C^*))$. To implement it, the government collects $\alpha_i^* x^L$ unit of private good from individual i .

- ① $\max u_i(x, m_i)$ subject to $\alpha_i x + \alpha_i m_i = 0$
- ② $\max u_i(x, m_i)$ subject to $\alpha_i + x + m_i = 0$
- ③ $\max u_i(x, m_i)$ subject to $x + \alpha_i m_i = 0$
- ④ $\max u_i(x, m_i)$ subject to $\alpha_i x + m_i = 0$

- ⑤ $\max u_i(x, m_i)$
- ⑥ $\min u_i(x, m_i)$ subject to $\alpha_i x + \alpha_i m_i = 0$
- ⑦ $\min u_i(x, m_i)$ subject to $\alpha_i + x + m_i = 0$
- ⑧ $\min u_i(x, m_i)$ subject to $x + \alpha_i m_i = 0$
- ⑨ $\min u_i(x, m_i)$ subject to $\alpha_i x + m_i = 0$
- (4) Choose the correct answer from ①–⑨ for the level of public good provision under the Lindahl mechanism when individuals submit their types $(\theta_A, \theta_B, \theta_C)$.
- ① $(\theta_A^{\frac{1}{2}} + \theta_B^{\frac{1}{2}} + \theta_C^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$
- ② $(\theta_A^{\frac{1}{2}} + \theta_B^{\frac{1}{2}} + \theta_C^{\frac{1}{2}})$
- ③ $(\theta_A^{\frac{1}{2}} + \theta_B^{\frac{1}{2}} + \theta_C^{\frac{1}{2}})^2$
- ④ $(\theta_A + \theta_B + \theta_C)^{\frac{1}{2}}$
- ⑤ $(\theta_A + \theta_B + \theta_C)$
- ⑥ $(\theta_A + \theta_B + \theta_C)^2$
- ⑦ $(\theta_A^2 + \theta_B^2 + \theta_C^2)^{\frac{1}{2}}$
- ⑧ $(\theta_A^2 + \theta_B^2 + \theta_C^2)$
- ⑨ $(\theta_A^2 + \theta_B^2 + \theta_C^2)^2$
- (5) Suppose that the true types of individuals are given as $(\theta_A^*, \theta_B^*, \theta_C^*)$. Choose the correct answer from ①–⑨ for the payoff function $\pi^L : S_A \times S_B \times S_C \rightarrow \mathbb{R}^3$ of the public good provision game under the Lindahl mechanism, where the set of players is $\{A, B, C\}$, and the set of strategies of individual i is $S_i = \{\theta_i | \theta_i > 0\}$.
- ① $\pi_i^L(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (\theta_i^* - \theta_i)(\theta_A + \theta_B + \theta_C)^{\frac{1}{2}}$ for each $i = A, B, C$
- ② $\pi_i^L(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (\theta_i^* - \theta_i)(\theta_A + \theta_B + \theta_C)$ for each $i = A, B, C$
- ③ $\pi_i^L(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (\theta_i^* - \theta_i)(\theta_A + \theta_B + \theta_C)^2$ for each $i = A, B, C$
- ④ $\pi_i^L(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (2\theta_i^* - \theta_i)(\theta_A + \theta_B + \theta_C)^{\frac{1}{2}}$ for each $i = A, B, C$
- ⑤ $\pi_i^L(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (2\theta_i^* - \theta_i)(\theta_A + \theta_B + \theta_C)$ for each $i = A, B, C$
- ⑥ $\pi_i^L(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (2\theta_i^* - \theta_i)(\theta_A + \theta_B + \theta_C)^2$ for each $i = A, B, C$
- ⑦ $\pi_i^L(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (\theta_i^* - \theta_i)^2(\theta_A + \theta_B + \theta_C)^{\frac{1}{2}}$ for each $i = A, B, C$
- ⑧ $\pi_i^L(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (\theta_i^* - \theta_i)^2(\theta_A + \theta_B + \theta_C)$ for each $i = A, B, C$
- ⑨ $\pi_i^L(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (\theta_i^* - \theta_i)^2(\theta_A + \theta_B + \theta_C)^2$ for each $i = A, B, C$
- (6) Choose the correct answer from ①–⑧ for each of (a)–(c) to complete the following sentences. The same answer can be applied several times.

To check whether the truth-telling strategy profile $(\theta_A^*, \theta_B^*, \theta_C^*)$ is a Nash equilibrium or not, we need to check whether each player can profitably deviate from the profile. That is, it is a Nash equilibrium if for each $i =$

A, B, C and each strategy $\theta_i \in S_i$, (a). If the true types are given as $(\theta_A^*, \theta_B^*, \theta_C^*) = (2, 4, 8)$, then the truth-telling strategy profile (b) a Nash equilibrium. If the true types are given as $(\theta_A^*, \theta_B^*, \theta_C^*) = (2, 2, 2)$, then the truth-telling strategy profile (c) a Nash equilibrium.

- ① $\pi_i^L(\theta_A^*, \theta_B^*, \theta_C^*) \geq \pi_i^L(\theta_i, \theta_{-i}^*)$
- ② $\pi_i^L(\theta_A^*, \theta_B^*, \theta_C^*) > \pi_i^L(\theta_i, \theta_{-i}^*)$
- ③ $\pi_i^L(\theta_A^*, \theta_B^*, \theta_C^*) = \pi_i^L(\theta_i, \theta_{-i}^*)$
- ④ $\pi_i^L(\theta_A^*, \theta_B^*, \theta_C^*) \neq \pi_i^L(\theta_i, \theta_{-i}^*)$
- ⑤ $\pi_i^L(\theta_A^*, \theta_B^*, \theta_C^*) \leq \pi_i^L(\theta_i, \theta_{-i}^*)$
- ⑥ $\pi_i^L(\theta_A^*, \theta_B^*, \theta_C^*) < \pi_i^L(\theta_i, \theta_{-i}^*)$
- ⑦ is
- ⑧ is not

NOTE: In ①–⑥, the symbol $(\theta_i, \theta_{-i}^*)$ stands for the strategy profile generated from $(\theta_A^*, \theta_B^*, \theta_C^*)$ by replacing player i 's strategy with θ_i . For example, $(\theta_B, \theta_{-B}^*) = (\theta_A^*, \theta_B, \theta_C^*)$.

- (7) Replacing the Lindahl mechanism with a VCG mechanism below, consider the game described in question (5). Choose the correct answer from ①–⑨ for the payoff function $\pi^{VCG} : S_A \times S_B \times S_C \rightarrow \mathbb{R}^3$ of the new game.

VCG mechanism

- The level of public good provision under the VCG mechanism is same as the one under the Lindahl mechanism x^L . The government collects $(x^L - \sum_{j \neq i} 2\theta_j x^{L\frac{1}{2}})$ unit of private good from individual i . That is, each individual i bears the total cost x^L minus the utility that other individuals obtain directly from the public good.

- ① $\pi_i^{VCG}(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (\theta_i^* - \theta_i + \sum_{j \neq i} \theta_j)(\theta_A + \theta_B + \theta_C)^{\frac{1}{2}}$ for each $i = A, B, C$
- ② $\pi_i^{VCG}(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (\theta_i^* - \theta_i + \sum_{j \neq i} \theta_j)(\theta_A + \theta_B + \theta_C)$ for each $i = A, B, C$
- ③ $\pi_i^{VCG}(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (\theta_i^* - \theta_i + \sum_{j \neq i} \theta_j)(\theta_A + \theta_B + \theta_C)^2$ for each $i = A, B, C$
- ④ $\pi_i^{VCG}(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (2\theta_i^* - \theta_i + \sum_{j \neq i} \theta_j)(\theta_A + \theta_B + \theta_C)^{\frac{1}{2}}$ for each $i = A, B, C$
- ⑤ $\pi_i^{VCG}(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (2\theta_i^* - \theta_i + \sum_{j \neq i} \theta_j)(\theta_A + \theta_B + \theta_C)$ for each $i = A, B, C$

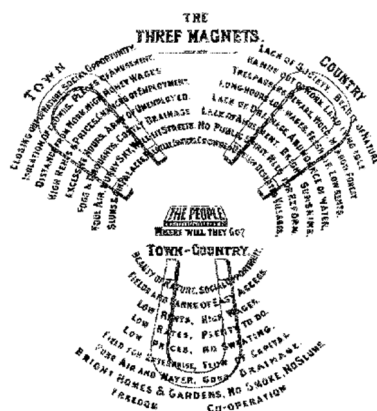
- ⑥ $\pi_i^{VCG}(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (2\theta_i^* - \theta_i + \sum_{j \neq i} \theta_j)(\theta_A + \theta_B + \theta_C)^2$ for each $i = A, B, C$
- ⑦ $\pi_i^{VCG}(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (\theta_i^* - \theta_i + \sum_{j \neq i} \theta_j)^2(\theta_A + \theta_B + \theta_C)^{\frac{1}{2}}$ for each $i = A, B, C$
- ⑧ $\pi_i^{VCG}(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (\theta_i^* - \theta_i + \sum_{j \neq i} \theta_j)^2(\theta_A + \theta_B + \theta_C)$ for each $i = A, B, C$
- ⑨ $\pi_i^{VCG}(\theta_A, \theta_B, \theta_C) = (\theta_i^* - \theta_i + \sum_{j \neq i} \theta_j)^2(\theta_A + \theta_B + \theta_C)^2$ for each $i = A, B, C$
- (8) In the game described in question (7), it is known that the truth-telling strategy θ_i^* maximizes player i 's payoff whenever other players submit any strategies. Answer the name of such strategy.

III. State a relationship between marginal rates of substitution of consumers under competitive equilibria. Then, state an implication of it. The answer should be roughly 100 words in total.

都市・地域計画

問題ⅠからⅢより2題選択して答えよ。問題ごとに別々の解答用紙を使用せよ。

I. 下記の図は、19 世紀末に提案された都市論を象徴するものである。図をみて以下の問(1)-(3)に答えよ。



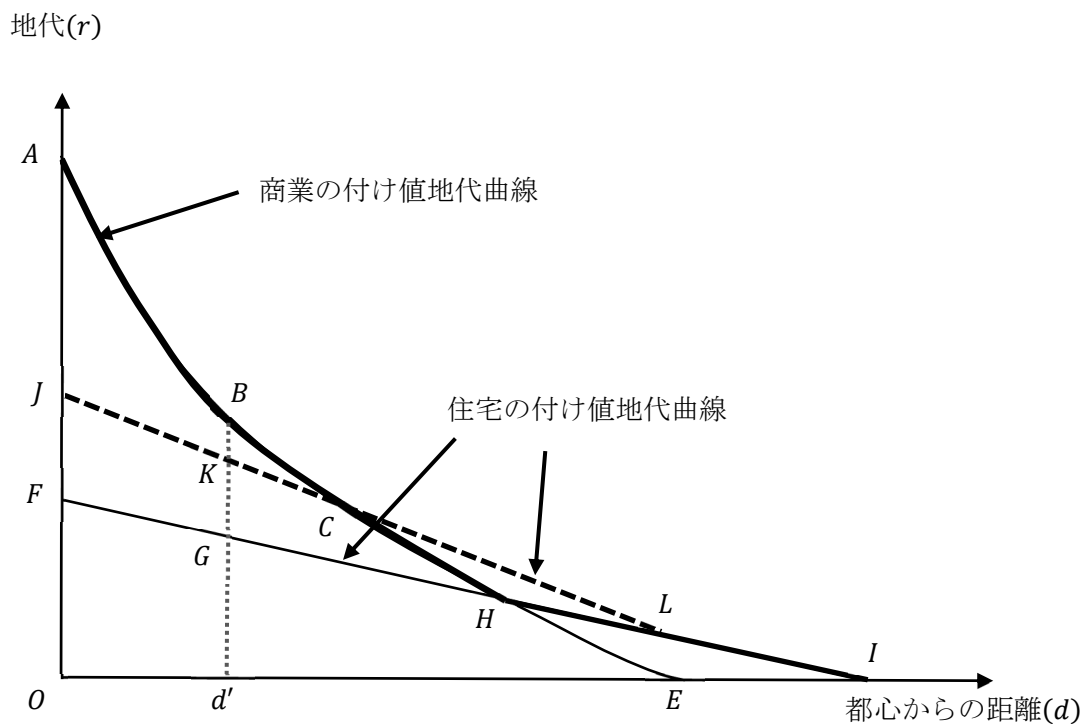
- (1) この都市論の名称、提唱者の氏名、この図が意味する内容を説明せよ。
- (2) この都市論は世界各地の都市計画や都市開発に大きな影響を与えた。日本の都市計画にこの概念がどのように取り入れられたのか、またどのような成果と問題があるか述べよ。
- (3) 新型コロナウイルスの感染症の拡大は、身近な地域での暮らし方や都市構造に大きな変化をもたらしている。どのような変化が都市に生じていると考えられるか。この都市論の考え方に関連付けながら、これからの都市計画が目指すべき方向と課題は何か論ぜよ。

Ⅱ. 環境や交通をめぐる課題に関する以下の問(1)-(3)に答えよ。

- (1) 環境政策としてカーボンニュートラルの実現が必要であるが、具体的には何のために、何の数値をいつまでにどうすることを国際機関より求められているかを述べよ。
- (2) ロサンゼルス、ヒューストンなどの米国の大都市圏と、東京、大阪などの日本の大都市圏での交通手段の分担率がどのように異なるかを述べよ。その上で、そのように異なることの理由と、その違いがそれぞれの交通環境負荷に及ぼす影響について論ぜよ。
- (3) 現在日本では公共交通の衰退が著しい。どのようにすれば公共交通の利用増進が図られると考えられるか。箇条書きにして具体的に説明せよ。

Ⅲ. 日本の土地利用規制に関する以下の問(1)–(3)に答えよ。

- (1) 土地利用規制は土地という私有財産の使用方法を制限する。これは個人の権利の制限であるが、このような政策が正当化される理由は何か。土地利用規制がない場合に起こりうる問題について例を挙げつつ論ぜよ。
- (2) 日本の用途地域規制では、一般に、住居用途よりも、商業・工業用途のほうが厳しい規制が課されている。この理由について(1)の考え方を踏まえて説明せよ。
- (3) 以下の図は、都心(O)からの距離(d)と地代(r)の関係を示したものである。この図において、 d' よりも都心側のエリアのみ商業施設が立地できるような規制を行ったところ、住宅の付け値地代曲線が、 $FGHI$ から $JKLI$ になったとする。図内の記号を用いて、この規制の経済効果（総余剰）を示せ。



出典：高橋孝明『都市経済学』有斐閣、2012年、の図9-7を一部改変

Urban and Regional Planning

Choose two problems from the following problems I-III to answer. Use a separate answer sheet for each problem.

I. The figure below symbolizes the urbanism proposed at the end of the 19th century. See the diagram and answer the following questions (1)-(3).



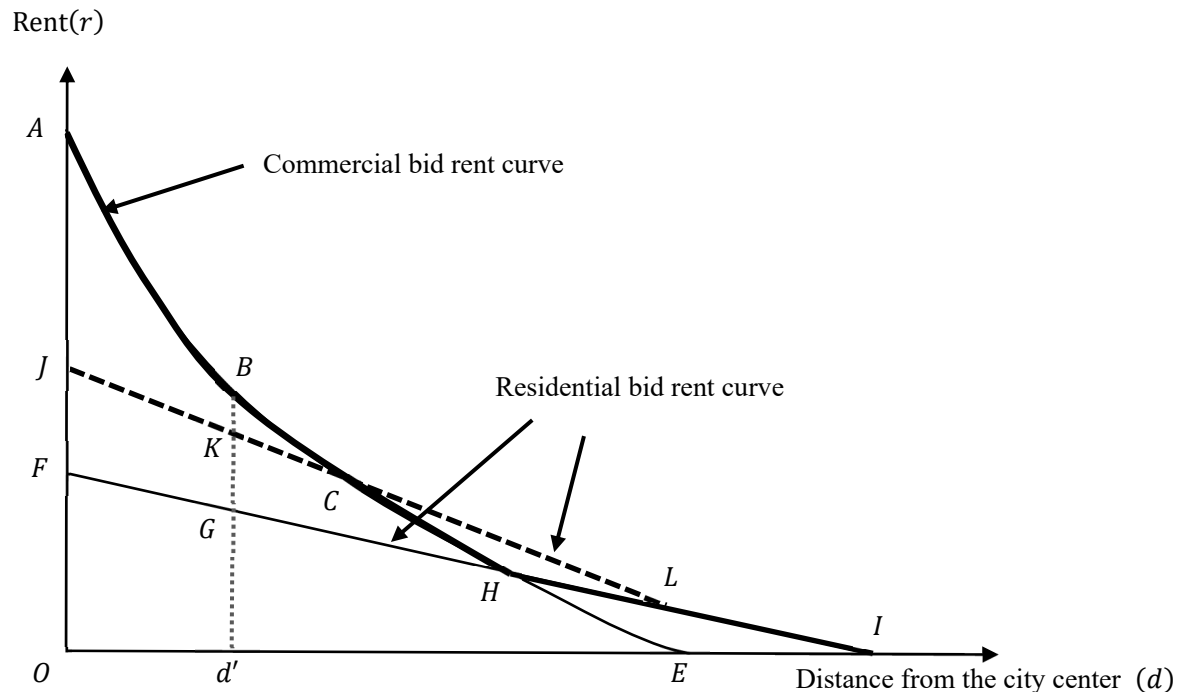
- (1) Answer the name and the proponent of this urbanism, then explain what this diagram means.
- (2) This urbanism has significantly impacted urban planning and urban development worldwide. Explain how this concept has been incorporated into urban planning in Japan and what achievements and issues it has faced.
- (3) The spread of the new coronavirus infection is causing significant changes in the way we live and the urban structure in our neighborhoods close to home. What kind of changes is occurring in cities? Concerning this concept of urbanism, discuss the direction and issues urban planning should aim for in the future.

II. Answer the following questions (1)-(3) on issues related to the environment and transportation.

- (1) As an environmental policy, carbon neutrality is required to be achieved. Specifically, describe what purpose it is and what index value is required by the international organization by when.
- (2) Describe the difference in transportation modes between US metropolitan areas such as Los Angeles and Houston and Japanese metropolitan areas such as Tokyo and Osaka. Then, discuss the reason for such differences and the impact of such differences on each traffic environment load.
- (3) Currently, the decline of public transportation is remarkable in Japan. How can we increase the number of users of such public transportation? Explain in detail in a specific bulleted list.

III. Answer the following questions (1)-(3) regarding land-use regulations in Japan.

- (1) Land-use regulations restrict the use of land as private property. While this is a restriction on individual rights, what justifies such a policy? Discuss the problems that could occur in the absence of land use regulations, giving examples.
- (2) In Japan, land-use regulations usually impose stricter restrictions on commercial and industrial uses than on residential uses. Based on the idea in (1), explain the reason for this.
- (3) The following figure shows the relationship between the Distance (d) from the city center (O) and the Rent (r). In this figure, regulations were implemented to allow commercial facilities to be located only in the area closer to the city center than d' . As a result, the residential bid rent curve changes from $FGHI$ to $JKLI$. Using the symbols in the figure, indicate the economic benefit (total surplus) of this regulation.



Source: Partially modified from Figure 9-7 in Takaaki Takahashi,
“Urban Economics” (『都市経済学』), Yuhikaku, 2012