数学（解答例）

[問題 I 解答例]

(1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{v}_1.$

(2) $f(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}) = 2f(\boldsymbol{v}_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}.$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_2.$

(4) $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}) = \frac{1}{2}f(\boldsymbol{v}_1) + \frac{1}{2}f(\boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$

(5) ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ を並べた行列を P とする．$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$. よって $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2,$ $\boldsymbol{v}_3$ は一次独立である.

(6) $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(7) ベクトル $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), f(\boldsymbol{v}_3)$ を並べた行列を F とする．$A = P^{-1}F$ より $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$

(8) A の固有方程式は $\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 30\lambda + 20 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 10\lambda - 20).$ よって $\lambda = 1, 5 \pm \sqrt{5}$ となり，固有値の一つが 1 で重解を持たない.

(9) $(A - E)\boldsymbol{u}_1 = 0$ を解いて，例えば $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. ここで A はベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ を基底とする f の表現行列であるから，$\boldsymbol{w} := -7\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}$ が $f(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}$ を満たす.

$f(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}$ が成り立つので，一次元部分空間 $W = \mathrm{span}\{\boldsymbol{w}\}$ は $f(W) \subset W$ を満たし，f に関して不変である.

(10) $A - E$ の核は A の固有値 1 に対応する固有空間で代数的重複度が 1 のため，次元 1. $A - E$ の像の次元は，次元定理より 2.

[問題 II 解答例]

(1) (a) $f(x,y)=e^{-x^2}e^{-y^2}$ は滑らかな関数であり，連鎖律より

$$f_x(x,y)=-2x\,e^{-x^2}e^{-y^2}=-2x\,f(x,y),$$
$$f_y(x,y)=-2y\,e^{-x^2}e^{-y^2}=-2y\,f(x,y)$$

がなりたつ．任意の $(p,q)\in\mathbb{R}^2$ に対し

$$f_x(p,q)=-2p\,f(p,q),\qquad f_y(p,q)=-2q\,f(p,q). \tag{Eq.1}$$

(b) $f(p,q)=e^{-(p^2+q^2)}>0$ なので (Eq.1) から

$$f_x(p,q)=0 \iff p=0,\ f_y(p,q)=0 \iff q=0.$$

よって

$$f_x(p,q)=f_y(p,q)=0 \text{ をみたす点は } (p,q)=(0,0) \text{ のみ.}$$

(c) さらに微分すると

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,y)&=\frac{\partial}{\partial x}\big(-2xf(x,y)\big)\\
&=-2f(x,y)+(-2x)f_x(x,y)\\
&=f(x,y)\,(4x^2-2),\\
f_{xy}(x,y)&=\frac{\partial}{\partial y}\big(-2xf(x,y)\big)\\
&=-2xf_y(x,y)\\
&=4xy\,f(x,y),\\
f_{yy}(x,y)&=\frac{\partial}{\partial y}\big(-2yf(x,y)\big)\\
&=-2f(x,y)+(-2y)f_y(x,y)\\
&=f(x,y)\,(4y^2-2).
\end{aligned}$$

よって任意の $(p,q)\in\mathbb{R}^2$ に対し

$$f_{xx}(p,q)=(4p^2-2)f(p,q),\quad f_{xy}(p,q)=4pq\,f(p,q),\quad f_{yy}(p,q)=(4q^2-2)f(p,q). \tag{Eq.2}$$

(d) (b) より $(p,q)=(0,0)$ のみを調べればよい．(Eq.2) と $f(0,0)=1$ から

$$f_{xx}(0,0)=-2,\qquad f_{xy}(0,0)=0,\qquad f_{yy}(0,0)=-2$$

であり，判別式 $\Delta(0,0)$ は

$$\Delta(0,0)=(f_{xy}(0,0))^2-f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)=0-(-2)(-2)=-4<0$$

となる．また

$$f_{xx}(0,0)=-2<0$$

である．(c) で求めた 2 次偏導関数はすべて連続であるので，関数 $f(x,y)$ は $(p,q)=(0,0)$ で極大値をもつ．

(2) (a) $u = \frac{1}{2t}$, $v = -e^{-t^2}$ より，

$$u'\,dt = -\frac{1}{2t^2}\,dt, \quad v'\,dt = (2te^{-t^2})\,dt.$$

部分積分の公式

$$\int u\,v'\,dt = u\,v - \int u'\,v\,dt$$

と，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\dfrac{e^{-t^2}}{2t^2} > 0$ であり，任意の $n \geq 1$ に対して $-\dfrac{e^{-n^2}}{2n} < 0$ であることから，任意の $n \geq m > 0$ に対して以下が成り立つ：

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_m^n e^{-t^2} dt &= \left[-\frac{e^{-t^2}}{2t}\right]_m^n - \int_m^n \Big(-\frac{1}{2t^2}\Big)(-e^{-t^2})\,dt \\ &= \left(-\frac{e^{-n^2}}{2n} + \frac{e^{-m^2}}{2m}\right) - \int_m^n \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt \\ &\leq \left(-\frac{e^{-n^2}}{2n} + \frac{e^{-m^2}}{2m}\right) \\ &< \frac{e^{-m^2}}{2m} \end{aligned}$$

(b) 任意の $n \geq 1$ に対して，

$$a_n = \int_0^n e^{-t^2} dt = \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^n e^{-t^2} dt$$

が成り立ち，第 2 項は (a) の結果が得られているので，$m = 1$ として

$$a_n \leq \int_0^1 e^{-t^2} dt + \frac{e^{-1}}{2}$$

を得る．右辺は n によらない定数であることから，点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界である．

(c) $b_n := \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$ は

$$b_n = \left(\int_{-n}^n e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{-n}^n e^{-y^2} dy\right) = \left(\int_{-n}^n e^{-t^2} dt\right)^2$$

で与えられる．関数 e^{-t^2} の対称性と (b) の定義より

$$\int_{-n}^n e^{-t^2} dt = 2\int_0^n e^{-t^2} dt = 2a_n$$

であるので，$b_n = (2a_n)^2 = 4(a_n)^2$ である．

(b) で示したように，点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界であり，さらに任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $e^{-t^2} > 0$ であることから，任意の $n' \geq n$ に対して，

$$a_n = \int_0^n e^{-t^2} dt \leq \int_0^{n'} e^{-t^2} dt = a_{n'}$$

が成り立ち，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加数列であるので，$\lim_{n\to\infty} a_n$ は収束する．

同様に点列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{4(a_n)^2\}_{n=1}^{\infty}$ も上に有界な単調増加数列であるので，$\lim_{n\to\infty} b_n$ も収束することがわかる．

(d) 関数 $f(x,y)$ は D 上で $f(x,y) \geq 0$ であり，D の，ある拡大列 $\{D_n\}$ に対して極限値

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$$

が存在することから，広義積分 $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy$ が存在する．