

数学 (解答例)

[問題 I 解答例]

$$(1) a = 0 \text{ のとき, } \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^3 = 0.$$

よって固有値は $\lambda = 1, 1, 1$ (三重解).

$$(2) \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \text{ が一次独立} \Leftrightarrow \det A \neq 0. \text{ よって } a \neq -1.$$

$$(3) G = {}^tAA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & a^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

$$(4) a = 1 \text{ の場合, } G \text{ の固有方程式は, } \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = -(\lambda - 4)(\lambda - 1)^2 = 0.$$

よって固有値 $\lambda = 1, 1, 4$ (二重解).

$$(5) G \text{ を } \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \text{ を用いて表すと以下となる. } G = {}^tAA = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1 & {}^t\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 & {}^t\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3 \\ {}^t\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1 & {}^t\mathbf{v}_2\mathbf{v}_2 & {}^t\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3 \\ {}^t\mathbf{v}_3\mathbf{v}_1 & {}^t\mathbf{v}_3\mathbf{v}_2 & {}^t\mathbf{v}_3\mathbf{v}_3 \end{pmatrix}.$$

ここで実ベクトルの内積の性質より ${}^t\mathbf{v}_i\mathbf{v}_j = {}^t\mathbf{v}_j\mathbf{v}_i$. よって, $g_{ij} = g_{ji}$ より $G = {}^tG$ となり, G は対称行列.

$$(6) G = {}^tAA \text{ より, } {}^t\mathbf{w}G\mathbf{w} = {}^t(A\mathbf{w})A\mathbf{w} = {}^t\mathbf{q}\mathbf{q} = |\mathbf{q}|^2.$$

(7) (6) より ${}^t\mathbf{w}G\mathbf{w} = |\mathbf{q}|^2 \geq 0$. 等号が成立するのは $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ のときのみであるため, $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ のとき $\mathbf{q} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ が成立しないことを示せば良い. $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ が $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ で成り立つことがないのは, $a \neq -1$ のときのみである.

[問題 II 解答例]

(1) (a)

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0-0}{k} = 0$$

(b)

$$\epsilon(h,k) = \frac{h^2k}{h^2+k^2} - 0 - 0 \cdot h - 0 \cdot k = \frac{h^2k}{h^2+k^2}$$

(c) (i) $\epsilon(h,h) = \frac{h^2|h|}{2h^2} = \frac{|h|}{2}$ より

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\epsilon(h,|h|)}{\sqrt{h^2+h^2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{2\sqrt{h^2+h^2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

(ii) $\epsilon(h,h^2) = \frac{h^4}{h^2+h^4} = \frac{h^2}{1+h^2}$ より

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\epsilon(h,h^2)}{\sqrt{h^2+h^4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{(1+h^2)\sqrt{h^2+h^4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{(1+h^2)\sqrt{1+h^2}} = 0.$$

(d) $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\epsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ の値が経路によって異なり極限が存在しないことから、関数 $f(x,y)$ は原点において全微分可能ではない。

(2) (a) $(x,y) = (0,0) \iff r = 0$ であることから、 $r \neq 0$ (すなわち $r > 0$) のとき

$$g(r,\theta) = \frac{(r \cos \theta)^2 (r \sin \theta)}{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} = \frac{r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = r \cos^2 \theta \sin \theta.$$

よって、

$$g(r,\theta) = \begin{cases} r \cos^2 \theta \sin \theta & (r > 0 \text{ のとき}), \\ 0 & (r = 0 \text{ のとき}), \end{cases}$$

であり、以上をまとめれば、 $g(r,\theta) = r \cos^2 \theta \sin \theta$.

(b) どのような θ に対しても $0 \leq \cos^2 \theta \leq 1$, $|\sin \theta| \leq 1$ であることから

$$-1 \leq -\cos^2 \theta |\sin \theta| \leq \cos^2 \theta \sin \theta \leq \cos^2 \theta |\sin \theta| \leq 1$$

を得る。よって

$$-r \leq r \cos^2 \theta \sin \theta \leq r$$

がなりたつ。挟み撃ちの原理より

$$0 = \lim_{r \rightarrow 0} (-r) \leq \lim_{r \rightarrow 0} r \cos^2 \theta \sin \theta \leq \lim_{r \rightarrow 0} r = 0$$

であるので、 $\lim_{r \rightarrow 0} g(r,\theta) = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos^2 \theta \sin \theta = 0$ を得る。

- (c) 1. 極座標変換 $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ により, $f(x, y) = g(r, \theta)$ であり, $(x, y) = (0, 0) \iff r = 0$ であること,
 2. さらに, r が 0 に近づく過程で, θ は必ずしも特定の値に固定されておらず, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲で, 任意の値に変化できるという仮定の下で, $\lim_{r \rightarrow 0} g(r, \theta) = 0$ であること

は,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$$

であることを保証している. よって, $f(x, y)$ は原点において連続である.

- (d) 極座標変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ($r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$) のヤコビアン J は

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r.$$

- (e) 極座標変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ($r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$) において

$$(x, y) \in D \iff (r, \theta) \in \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

であるので, (a), (b) の結果を用いて以下を得る.

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \cos^2 \theta \sin \theta \cdot r dr d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \right) \times \left(\int_0^1 r^2 dr \right). \end{aligned}$$

- (f) まず r に関する積分は以下のように求められる.

$$\int_0^1 r^2 dr = \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

$0 \leq \theta \leq \pi$ について

$$\cos^2(\theta + \pi) \sin(\theta + \pi) = -\cos^2 \theta \sin \theta$$

であることから,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta &= \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta - \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \\ &= 0. \end{aligned}$$

そのほか, 置換積分等を用いても求めることができる.