数学（解答例）

[問題 I 解答例]

I. (1) 3×3 の行列の積が正しく計算できればよい．

(2) 3×3 の行列の積が正しく計算できればよい．(1) より，${}^t\!A = A^{-1}$ であることを用いてもよい．

(3) (1) あるいは (2) より，${}^t\!A = A^{-1}$ である．A に対する掃き出し法で直接求めてもよい．

(4) X の固有多項式を解くことにより，$-1, -1, 1$ が X の固有値であることがわかる．${}^t\!A = A^{-1}$ であることを用いれば，$A\,X\,{}^t\!A$ の特性多項式と X の特性多項式が等しいことがわかる．以上から，$A\,X\,{}^t\!A$ の固有値は X の固有値と一致し，$-1, -1, 1$ である．

その他の $A\,X\,{}^t\!A$ の固有値を求める方法として，$C = A\,X\,{}^t\!A$ とすると ${}^t\!A\,C\,A = X$ が成り立つことを用いた方法や，$A\,X\,{}^t\!A$ を直接計算する方法などが考えられる．

(5) $Y \in G_A$ であるならば，ある $X \in O(3)$ が存在して，$Y = A\,X\,{}^t\!A$ で与えられる．(1), (2) で示したように，$A\,{}^t\!A = {}^t\!A\,A = E_3$ であり，さらに $X \in O(3)$ より $X\,{}^t\!X = {}^t\!X\,X = E_3$ であることを用いれば，$Y\,{}^t Y = {}^t Y\,Y = E_3$ が成り立つことが確かめられ，題意を得る．

(6) $Y \in O(3)$ であるとき，適当な $X \in O(3)$ に対して，$Y = A\,X\,{}^t\!A$ が成り立つことを示せばよい．$X = {}^t\!A\,Y\,A$ とすれば，$A\,{}^t\!A = {}^t\!A\,A = E_3$ と $Y\,{}^t Y = {}^t Y\,Y = E_3$ より，$X \in O(3)$ であり，$Y = A\,X\,{}^t\!A$ であることが導かれる．

(5),(6) については，A が直交行列であり，$A\,X\,{}^t\!A$ が定める座標変換が直交性を保存することを用いて，集合 G_A と $O(3)$ の等価性を示す議論も考えられる．

[問題 II 解答例]

(1) $f(x)$ は何回も微分可能な場合，次の展開式（マクローリン展開）が成り立つ.

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

(i) 微分方程式の導出.

$f(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{Sin}^{-1} x)^2$ であることから，1 回微分すると.

$$f'(x) = \mathrm{Sin}^{-1} x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$f(x)$ の 2 回微分は以下で与えられる.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \mathrm{Sin}^{-1} x \frac{-1}{1-x^2} \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} (-2x) \\ &= \frac{1}{1-x^2} + \frac{-1}{1-x^2} f'(x)(-x). \end{aligned}$$

よって，

$$f''(x)(1-x^2) - xf'(x) = 1.$$

(ii)

上記の計算過程から，$f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) = \ 1$ を得る．さらに上記の式を 1 回及び 2 回微分すると $f^{(3)}(0) = 0, f^{(4)}(0) = 4$ を得る．$f(x)$ のマクローリン展開から次式を得る.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} + o(x^4) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4).$$

つまり，$a_0 = a_1 = 0$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1/6$.

(iii)

$f''(x)(1-x^2) - xf'(x) = 1$ の 両辺を $n \geq 1$ 回微分すると次式を得る.

$$f^{(n+2)}(x)(1-x^2) + nf^{(n+1)}(x)(-2x) + \frac{n(n-1)}{2} f^{(n)}(x)(-2) - (xf^{(n+1)}(x) + nf^{(n)}(x)) = 0.$$

$x = 0$ を代入すると次式を得る.

$$f^{(n+2)}(0) - n(n-1)f^{(n)}(0) - nf^{(n)}(0) = 0.$$

つまり，

$$f^{(n+2)}(0) - n^2 f^{(n)}(0) = 0.$$

よって,

$$f^{(2n+2)}(0) = (2n)^2(2n-2)^2 \cdots 2^2 f^{(2)}(0) = (2^n n!)^2.$$

回答として，$(2n)^2(2n-2)^2 \cdots 2^2$ としてもよい.

$$f^{(2n+1)}(0) = 0.$$

結果として $n = 1011, 1012$ を代入すると

$$f^{(2024)}(0) = (2^{1011} 1011!)^2, \qquad f^{(2025)}(0) = 0.$$

(2) $D_n = \{(x,y) | \frac{1}{n^2} \le x^2 + y^2 \le 1\}$ として，D_n 上の積分を考えて，$n \to \infty$ とする．$D - \{(0,0)\}$ 上で被積分関数が非正で符号が一定であることが，一つの固定した領域のみで広義積分を考えてよい.

(a) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ の変数変換により，$(x,y) \in D$ のときに，$0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi$ になる.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

(b) $x = 1/t$ とする.

$$\lim_{x \to +0} x^2 \log x = -\lim_{t \to \infty} \frac{\log t}{t^2} = -\lim_{t \to \infty} \frac{1/t}{2t} = 0.$$

(c)

1)

$$\begin{aligned}
\iint_D \log(x^2+y^2) dxdy &= \lim_{n \to \infty} \iint_{D_n} \log(x^2+y^2) dxdy \\
&= \lim_{n \to \infty} \iint_{1/n \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi} \log(r^2) r dr d\theta \\
&= 2\pi \lim_{n \to \infty} \int_{1/n}^{1} r \log r dr \\
&= 2\pi \lim_{n \to \infty} \int_{1/n}^{1} \log r dr^2 \\
&= 2\pi \lim_{n \to \infty} \left(r^2 \log r |_{1/n}^{1} - \int_{1/n}^{1} r^2 1/r dr \right) \\
&= -\pi.
\end{aligned}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\iint_D (2x^2+3y^2)dxdy &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2(2\cos^2\theta + 3\sin^2\theta) r dr d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (2\cos^2\theta + 3\sin^2\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{4} \times 5\pi = 5\pi/4.
\end{aligned}
$$