数学（解答例）

[問題 I 解答例]

I. (1) 固有方程式を解くことにより，固有値 $2, 2, 4$ を得る．

(2) 例えば,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

など．別の組もあり得る．

(3) 上記 (2) で示した行列 A に関する性質や，計算により，$AB = BA$ が成り立つことを示せばよい．

(4) $Y \in C(D)$ に対して，$X = PYP^{-1}$ とすれば，$F(X) = Y$ が成り立ち，さらに $X \in C(A)$ であることが確認でき，題意を得る．

(5) $F(X_1) = F(X_2)$ の式の両辺の左から P，右から P^{-1} を掛ければ，F の定義より題意を得る．

(6) $X_1, X_2 \in C(A)$，$\alpha \in \mathbb{R}$ について，F の定義に従い，$F(X_1 + X_2)$ と $F(\alpha X_1)$ を計算すれば，題意を得る．

(7) $DX = XD$ を計算することにより，行列 X について $DX = XD$ であることと

$$x_{13} = x_{23} = x_{31} = x_{32} = 0$$

であることが等しいため，上記が題意の条件であることがわかる

(8) 問 (7) の結果から，$C(D)$ の次元は 5 である．問 (4) – (6) の結果より，$F : C(A) \to C(D)$ は同型写像である．よってベクトル空間 $C(A)$ と $C(D)$ は同型であり，次元も等しい．$C(D)$ の次元は 5 であるので，$C(A)$ の次元も 5 である．

$C(D)$ の次元を求める他の方法として，$AX - XA = O$ を直接計算する方法や，$G(A) = AX - XA$ の表現行列を 3×3 実行列集合の基底 $E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{33}$ に対する $G(E_{11}), G(E_{12}), \ldots G(E_{33})$ から求め，この行列の核の次元を求める方法などが考えられる．

[問題 II 解答例]

(1) $f(x)$ は何回も微分可能な場合次の展開式が成り立つ.

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n). \tag{1}$$

ただし，この問題はロピタル定理を使ってもできる.

ここで，$\lim_{x\to 0} o(x^n)/x^n = 0$. この式を使うと，$f(x) = \sin x, f^{(1)}(x) = \cos x, f^{(2)}(x) = -\sin x, f^{(3)}(x) = -\cos x$.

(a)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

よって，

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

よって，$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = -\frac{1}{6}$.

(b)

一方，$g(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$. $g^{(1)}(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$. $g^{(2)}(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{2}(1+x)^{-3/2}$, $g^{(3)}(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{2} \times \frac{-3}{2}(1+x)^{-5/2}$. したがって，$g(x)$ は以下のように展開できる.

$$g(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3).$$

よって，

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2\right)}{x^3} = \frac{1}{16}.$$

$b_0 = 1, b_1 = 1/2, b_2 = -1/8, b_3 = 1/16$.

(c)

$(x, y) \neq (0, 0)$ について，

$$\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} = \frac{(x^2+2y^2)2y - 2xy(2x)}{(x^2+2y^2)^2} = \frac{4y^3 - 2x^2y}{(x^2+2y^2)^2}, \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

$(x, y) = (0, 0)$ について

$$\frac{\partial h(0,0)}{\partial x} = \lim_{\delta\to 0} \frac{h(\delta,0) - h(0,0)}{\delta} = \lim_{\delta\to 0} \frac{0}{\delta} = \lim_{\delta\to 0} 0 = 0.$$

(2) (a)

$$
\begin{aligned}
B(a+1,b) &= \int_0^1 x^a (1-x)^{b-1} dx \\
&= \int_0^1 x^a d - \frac{(1-x)^b}{b} \\
&= -x^a \left. \frac{(1-x)^b}{b} \right|_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-x)^b}{b} a x^{a-1} dx \\
&= \frac{a}{b} \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^b dx = \frac{a}{b} B(a, b+1).
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
B(a,b+1) &= \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^b dx \\
&= \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}(1-x) dx \\
&= B(a,b) - \int_0^1 x^a (1-x)^{b-1} dx \\
&= B(a,b) - B(a+1,b).
\end{aligned}
$$

(c)

$x = uv, y = u(1-v)$ と置くと $(u,v) \to (x,y)$ は $\Omega : 0 \leq u, 0 \leq v \leq 1$ の内部を $D : 0 \leq x, y$ の内部に1対1に写す．u, v の領域の求め方として，$uv > 0$ と $u(1-v) > 0$ から $u > uv > 0$ を得る．これを $uv > 0$ と合わせて $v > 0$ を得る．さらに $u(1-v) > 0$ から $u > 0, 0 < v < 1$ を得る．

i) ヤコビアン

$$
\begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix} = -u.
$$

したがって，ヤコビアンの絶対値が u である．

ii) よって

$$
dxdy = ududv.
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y} x^{a-1} y^{b-1} dx dy = \\
&= \int_0^\infty \int_0^1 e^{-u} u^{a-1} v^{a-1} u^{b-1} (1-v)^{b-1} u du dv \\
&= \int_0^\infty e^{-u} u^{a+b-1} du \int_0^1 v^{a-1} (1-v)^{b-1} dv \\
&= \Gamma(a+b) B(a,b).
\end{aligned}
$$

よって

$$
\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b) B(a,b).
$$

iii) $a = b = 1/2$ とすると,

$$
\Gamma(1/2)^2 = \Gamma(1) B(1/2, 1/2).
$$

一方, $\Gamma(1) = 1$ を容易に確認できる．また，$B(1/2, 1/2) = \pi$ が与えられているため，よって

$$
\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}.
$$

$y = z/\sqrt{2}$ と置くと

$$
\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = 1
$$

を得る.