日経平均先物でのボラティリティと
リアライズドボラティリティとの関係

経営工学主専攻 **201111291** 野口　裕未

指導教員：岸本　一男　教授

1.　研究の目的

1.1.　株価変動のパラメータ推定

時刻 t における株価を S_t とするとき, 株価変動は, 最も単純には式 (1) のような幾何ブラウン運動でモデル化される.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \tag{1}$$

式 (1) のパラメータ σ は, ボラティリティを表す．ボラティリティとは, 株価変動の強さを表す指標の事である．一般的に使用されているボラティリティを式 (1) に用いると, 大幅に精度が落ちる事が問題となっていた．そこで近年, 高頻度データを用いたリアライズド・ボラティリティ（RV）と呼ばれる計測値を用いてボラティリティを推定する手法が注目されている．わが国では, 例えば柴田 (2006)[1], 渡部・佐々木 (2006)[4] が RV の実証研究を行っている.

1.2.　リアライズド・ボラティリティ (RV) とは

高頻度データを用いて日中の価格変動の観測値からボラティリティを測定する方法を, リアライズド・ボラティリティという．1 日の時点 t における株価を $P_t(1 \leqq t \leqq T)$ とし, t 時点での対数収益率 (リターン) を

$$r_i = \log P_t - \log P_{t-1},\ 1 \leqq t \leqq T \tag{2}$$

と置くとき, 第 i 日の RV(RV_i) は,

$$RV_i = \sum_{t=1}^{T} r_t^2 \tag{3}$$

と定義される.

1.3.　研究の目的

RV に関する先行研究は, RV を用いたボラティリティ予測の研究や比較研究は多くなされているが, RV の計算に用いるデータの取り方に関する研究は行われておらず, 決定的な RV の測定法は分かっていない．そこで本研究では, RV の測定法として, 価格の種類や時点 t の取り方を変えた複数の RV を用いて, それらの安定性や大小関係を整理した．更に, これらの異なる測定法のうちの何れの場合が, 現実のボラティリティ推定法と矛盾しないかを検討した.

2.　研究の方法

2.1.　RV 計測内容

1 つ目の研究として, RV の計算に用いる価格の種類や時点 t の取り方を変える事によって, RV の値はどの様に変化するかを調査した．その方法は, 価格を約定値・仲値の 2 種類, 時点 t の取り方を 1 分間隔・2 分間隔・5 分間隔・10 分間隔の 4 種類を考え, 価格間 (約定値-仲値), 時間間隔間 (1 分・2 分・5 分・10 分) で, RV 値はどの様に変化するかを調査した．ここで, 約定値とは株取引が成立した時の 1 株あたりの値段, 仲値とは買い注文の中で最も高い価格と売り注文の中で最も安い価格の平均値をいう.

2.2.　RV 測定結果の分析 1

2 つ目の研究として, 2.1. の方法で算出した RV は, 幾何ブラウン運動のボラティリティを説明するものとして使って良いかを検証した．まず始めに, 対数価格の株価変動 (確率変数 X) が, 平均 0, 分散 RV の正規分布 ($X \sim N(0, RV)$) に従うと仮定すると, $\frac{X}{\sqrt{RV}} \sim N(0,1)$ の 2 乗は, 自由度 1 の χ^2 分布に従う．本研究では, 株価変動を, 日中の取引の始値と終値の差とした．$\frac{(\log 終値 - \log 始値)^2}{RV} \sim \chi^2(1)$ ならば, 日中の株価変動は RV をボラティリティとする幾何ブラウン運動であるという仮定と整合的であるといえる為, これを検証した．方法として, 本研究で分析した全 707 日分のデータに対して $\frac{(\log 終値 - \log 始値)^2}{RV}$ を計算し, 観測値を得る．観測値を 0.1 ずつ区切り, 観測値の頻度をヒストグラムで表し, それが $\chi^2(1)$ 分布に従っているかを 5% 有意水準の χ^2 適合検定で調べた．次に, $\frac{X}{\sqrt{RV}} \sim N(0,1)$ と仮定したが, 本当に分散は 1 であるかどうかを確認した．方法として, 全 707 日分のデータに対して計算した $\frac{(\log 終値 - \log 始値)^2}{RV}$ の和を取ると, $\sum_{k=1}^{707} \frac{(\log 終値 - \log 始値)^2}{RV} \sim \chi^2(707)$ より,

$$Y \equiv \frac{1}{707} \sum_{k=1}^{707} \frac{(\log 終値 - \log 始値)^2}{RV} \sim N(1, \frac{2}{707})$$

が, $0.9 \leqq Y \leqq 1.1$ ならば (計算過程略), 標準正規分布の有意水準 5% での両側検定で, $\frac{X}{\sqrt{RV}} \sim N(0,1)$ であることが採択される．以上, 2 つの検定を行い, どちらの検定結果も採択された RV は, 幾何ブラウン運動のボラティリティを説明するものとして使って良いといえる.

2.3.　RV 測定結果の分析 2

3 つ目の研究として, RV の結果と様々な株価の変動 (始値・終値間での変動, 高値・安値間での変動) との関連性を

調査し, RV の性質を明らかにした.
方法として, 単回帰式 $y = ax + b$ を,
1. $y = (\log 終値 - \log 始値)^2, x = \mathrm{RV}$ とした場合
2. $y = (\log 高値 - \log 安値)^2, x = \mathrm{RV}$ とした場合
で回帰した.

3. 研究結果と考察

3.1. RV 計測結果

RV モデル別の RV 平均値は表 1 の結果になった.

表 1 RV の平均値

時間間隔	約定値	仲値
1 分	$1.70{*}10^{-4}$	$9.82{*}10^{-5}$
2 分	$1.40{*}10^{-4}$	$8.88{*}10^{-5}$
5 分	$1.00{*}10^{-4}$	$7.88{*}10^{-5}$
10 分	$9.15{*}10^{-5}$	$7.30{*}10^{-5}$

表 1 を見ると, 価格間 (約定値-仲値) で RV 値を比較した場合, 時間間隔が大きくなるにつれて RV 値の差が小さくなることが分かった.
また, 時間間隔間 (1 分・2 分・5 分・10 分) で RV 値を比較した場合, 約定値の時は大きな差が出るが, 仲値の時は差が小さくなることが分かった.

3.2. RV 測定結果の分析 1 結果

3.1. で算出した RV が, 幾何ブラウン運動のボラティリティを説明するものとして使って良いかを, 5% 有意水準の χ^2 適合検定及び標準正規分布の有意水準 5% での両側検定で検定した結果, 表 2 のようになった.

表 2 χ^2 適合検定及び標準正規分布の両側検定結果

RV モデル	χ^2 検定 (左側)	χ^2 検定 (右側)	χ^2 検定 (両側)	標準正規分布の両側検定
1 分間隔/約定値	採択	棄却	棄却	棄却
1 分間隔/仲値	採択	採択	採択	棄却
2 分間隔/約定値	採択	棄却	棄却	棄却
2 分間隔/仲値	採択	採択	採択	棄却
5 分間隔/約定値	採択	棄却	棄却	棄却
5 分間隔/仲値	採択	採択	採択	採択
10 分間隔/約定値	採択	採択	採択	棄却
10 分間隔/仲値	採択	採択	棄却	棄却

表 2 より, 株価の日中の変動は, 5 分間隔の仲値を用いて算出した RV のみ, その RV をボラティリティとする幾何ブラウン運動であるという仮定と整合的であるといえる. この結果から, 5 分間隔の仲値を用いて算出した RV は, 株価変動を説明する上で最も安定した RV であるといえる. RV に関する先行研究では, 5 分間隔の約定値を用いて RV を計算している論文が多かったが, それは RV として適当であるかどうか検討を要することが示唆された.

3.3. RV 測定結果の分析 2 結果

3.3.1. $y = (\log 終値 - \log 始値)^2, x = \mathrm{RV}$ とした場合

表 3 $(\log 終値 - \log 始値)^2$ と RV の単回帰分析

RV モデル	傾き (a)	切片 (b)	決定係数 R2
1 分間隔/約定値	0.97	$-7.6{*}10^{-5}$	0.22
1 分間隔/仲値	1.13	$-1.7{*}10^{-5}$	0.28
2 分間隔/約定値	1.04	$-4.7{*}10^{-5}$	0.25
2 分間隔/仲値	1.15	$-8.0{*}10^{-6}$	0.29
5 分間隔/約定値	1.07	$-1.8{*}10^{-5}$	0.28
5 分間隔/仲値	1.14	$-4.9{*}10^{-6}$	0.29
10 分間隔/約定値	1.17	$-1.3{*}10^{-5}$	0.30
10 分間隔/仲値	1.22	$5.3{*}10^{-6}$	0.28

表 3 の結果を見ると, RV は株価の日中の変動でのボラティリティだと見なしえるとしても, 必ずしも日中の変動の大きさを RV で精度良く測定出来ることを意味しない事が明らかになった.

3.3.2. $y = (\log 高値 - \log 安値)^2, x = \mathrm{RV}$ とした場合

表 4 $(\log 高値 - \log 安値)^2$ と RV の単回帰分析

RV モデル	傾き (a)	切片 (b)	決定係数 R2
1 分間隔/約定値	2.68	$-2.3{*}10^{-4}$	0.58
1 分間隔/仲値	2.99	$-5.7{*}10^{-5}$	0.66
2 分間隔/約定値	2.92	$-1.6{*}10^{-4}$	0.68
2 分間隔/仲値	3.14	$-4.2{*}10^{-5}$	0.73
5 分間隔/約定値	2.97	$-7.4{*}10^{-5}$	0.73
5 分間隔/仲値	3.14	$-1.1{*}10^{-5}$	0.75
10 分間隔/約定値	2.99	$-3.7{*}10^{-5}$	0.67
10 分間隔/仲値	3.17	$5.3{*}10^{-6}$	0.65

表 4 の結果から, 高値・安値間での変動は, RV(特に, 5 分間隔の仲値を用いて算出した RV) の代理変数となりうる可能性が示唆された.

参考文献

[1] 柴田舞. 高頻度データによるボラティリティの推定: Realized Volatility のサーベイと日本の株価指数および株価指数先物の実証分析. 金融研究, 27 (2007), 1-54.
[2]「後藤 允. 何故、株価は対数正規分布にしたがうと仮定されるか」. http://www.econ.hokudai.ac.jp/ goto/_private/stock.pdf.
[3] 林 高樹. 高頻度データと時間変更, 統計数理研究所, 統計数理 (2009),57,1,39-65
[4] 渡部敏明・佐々木浩二. ARCH 型モデルと"Realized Volatility"によるボラティリティ予測とバリュー・アット・リスク. 日本銀行金融研究所, 金融研究,2006.10
[5]「大阪取引所ホームページ」. http://www.ose.or.jp/
[6]「確率微分方程式」. http://ja.wikipedia.org