

A Dynamic Natural Hedge for Equity Indexed Annuities: Comparison with Simple Delta Hedge

201013026 ZHANG TAO

経営工学専攻 指導教員：岸本 一男 教授

1. 目的

オプションの売り手が Black-Scholes モデルに基づいてオプションの複製をしようとしても、現実の基礎証券のボラティリティは時間的に変動するため、単純なデルタヘッジでは対処しきれない。Bernard et al. [1] は、株価指数連動年金保険を念頭に置きながら、ボラティリティ変化に対する価格変化が互いに相殺し合う2つの証券を、リスク最小となる重みで組み合わせれば (Natural Hedge)、デルタヘッジ抜きでも一定のヘッジが可能であることを指摘し、更に、デルタヘッジとの組合せることを今後の課題とした。本研究では、Bernard et al. [1] の示唆がどの程度に有効であるかを、コンピュータ・シミュレーションによって検討する。

株価指数連動年金保険 (以下 EIA と略す) の市場規模と、全年金の中における変額年金の比率を、文献[3]に基づき日本国内の場合について、図1に纏める。

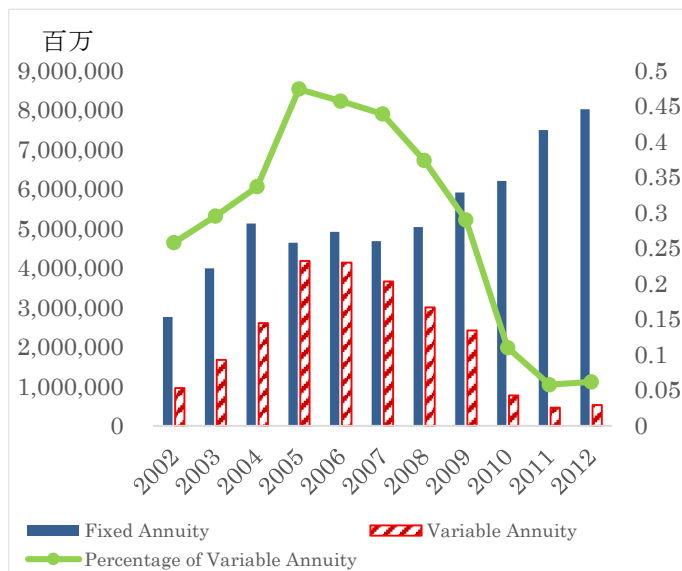


図1. 日本個人年金保険新規契約市場価格 ([3]より作成)

2002年に銀行窓販解禁から2005まで、個人年金保険新規契約額は増加したが、2007年から急減した。2008年と2009年に、インプライド・ボラティリティが高止まりしたために、いくつかの保険会社での巨大損失と新規販売停止が報道されている[2]。EIAのヘッジリスクを減少されることの重要性が見てとれるであろう。

2. モデル

M を初期投資額、 T を満期、 S_T を満期での資産価格、 g を保証利回り率、 k を市場参加率とするとき、Bernard et al. [1]は満期でのペイオフ X_T と Z_T とが、それぞれ以下の式で与えられる2つの EIA を取り扱っている：

① Standard Equity Indexed Contract (標準 EIA)

$$X_T = M \max\left(e^{gT}, k \frac{S_T}{S_0}\right) \\ = Me^{gT} + \left(\frac{Mk}{S_0}\right)\left[S_T - \frac{S_0 e^{gT}}{k}\right]^+$$

② Monthly Sum Cap EIA (MSC)

$$Z_T = M \max\left(e^{gT}, 1 + \sum_{i=1}^n \left(c, \frac{S_{t_i} - S_{t_{i-1}}}{S_{t_{i-1}}}\right)\right)$$

①はゼロクーポンボンドとコールオプションとの合成であり、Black-Scholes の公式を用いることができる。②は各期のリターンに上限 (キャップ) をつけたものの和を最終の利回り率と定める。この商品の満期でのペイオフは資産価格のパスに依存するから Monte Carlo シミュレーションで評価している。図2はボラティリティに対する2つの商品の価値を著者が計算したものである。

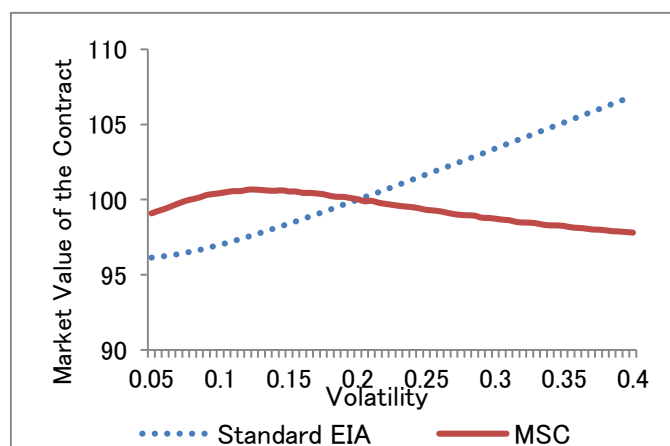


図2. マーケットバリュー

Bernard et al. [1] はトータルの販売数 n を、 n_1 (標準 EIA の数) と n_2 (MSC の数) の和とし、この販売比率をリスク最小となるように重みづけることを提案している。

Minimize:

$$S(n_1) = \sup_{\sigma \in [\sigma_{low}, \sigma_{high}]} (n_1 p_1 + (n - n_1) p_2) - \inf_{\sigma \in [\sigma_{low}, \sigma_{high}]} (n_1 p_1 + (n - n_1) p_2)$$

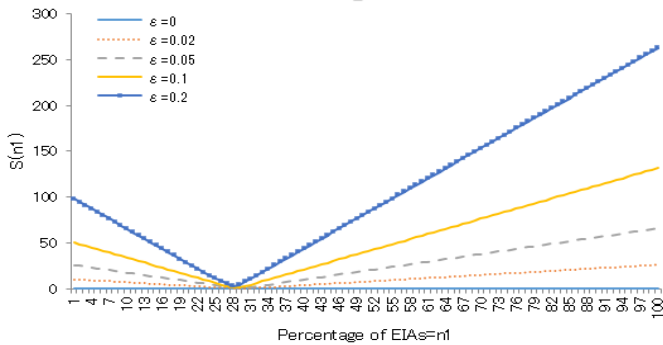


図3. σ 変動範囲に伴う最適割合 n_1

但し、 p_1 は標準 EIA の価格、 p_2 は MSC の価格であり、つまり、 σ の変動範囲に上限と下限とを設けて、その範囲内で、 $n_1 p_1 + (n - n_1) p_2$ というポートフォリオの価値の上限値と下限値との差 $S(n_1)$ を最も小さくする n_1^* を決定する。図3の例では変動範囲が2%、5%、10%、20%の時、28前後で安定している。

3. 計算結果

本研究のシミュレーションでは、Bernard et al. [1] のモデルを多少変更し、ペイオフ X_T を次のように定めた：

$$\begin{aligned} X_T &= M + N \left\{ \sum_{i=1}^{12} \left[\max \left(\frac{S_{i+1} - S_i}{S_i}, 0 \right) e^{\frac{(12-i)r}{12}} \right] - K \sum_{i=1}^{12} \left[\max \left(\frac{S_{i+1} - (1+c)S_i}{S_i}, 0 \right) e^{\frac{(12-i)r}{12}} \right] \right\} \\ &= M + N \frac{1}{S_0} \max(S_1 - S_0, 0) e^{\frac{(1-12)r}{12}} - NK \frac{1}{S_0} \max(S_1 - (1+c)S_0, 0) e^{\frac{(1-12)r}{12}} + L \\ &+ N \frac{1}{S_{11}} \max(S_{12} - S_{11}, 0) e^{\frac{(1-12)r}{12}} - NK \frac{1}{S_{11}} \max(S_{12} - (1+c)S_{11}, 0) e^{\frac{(1-12)r}{12}} \end{aligned}$$

同様に $S(n_1)$ を最小化する n_1^* を定め、更に通常のブラックショールズモデルでのデルタヘッジを行った。ボラティリティに起因するリスクとして、2つの場合を扱った。

3. 1. ブラウン運動の分散の推定誤差に起因するリスク

真の資産価格変動が標準偏差年率 $\sigma=2\%$ のブラウン運動に従う場合に、誤って、 $\sigma=25\%$ と推定してデルタヘッジをした場合、 $n_1=40\%$ のポートフォリオに対し、1万回ヘッジした結果を図4に与える。単独に販売した場合の標準 EIA と MSC の平均二乗誤差は 18.84 と 14.19 だが、ポートフォリオを組むと 7.82 である。

3. 2. 価格が GARCH (1, 1) モデルに従う場合

2009年1月から2013年12月の S&P 500 Futures 価格が GARCH (1, 1) モデルに従うと仮定してパラメータ推定し、分散の時間的変動に関し次の結果を得た：

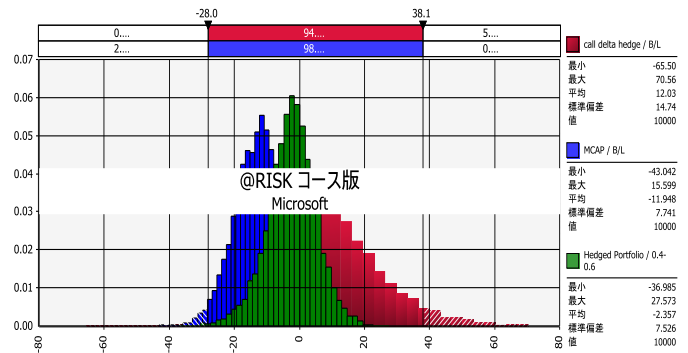


図4. ブラウン運動と仮定する結果例

$$\sigma_t^2 = 2.553561e^{-6} + 0.1322936e^2 \sigma_{t-1}^2 + 0.8515629 \sigma_{t-1}^2$$

真の株価がこの GARCH 過程に従う場合に、オプションの販売者が $n_1=9$ のポートフォリオを保有し、 $\sigma=25\%$ のブラウン運動に対するデルタヘッジを行った場合の、1万回のシミュレーションに対する結果を図5に与える。

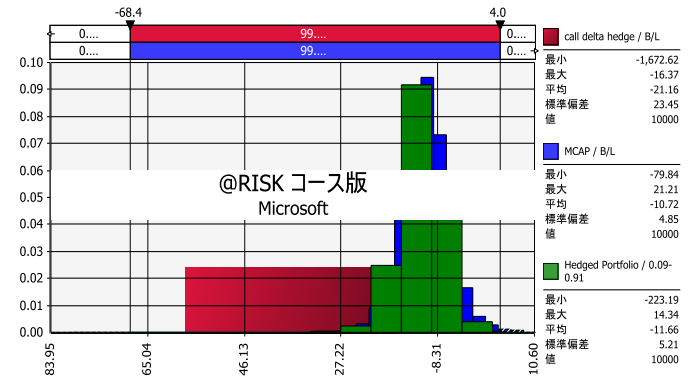


図5. GARCH モデルと仮定する結果例

ゼロに対する平均二乗誤差を指標として、標準 EIA と MSC の平均二乗誤差は 31.59 と 11.76 であり、ポートフォリオを組んだ場合は 12.77 となる。

4. 結果と考察

Bernard et al. [1] が提案した Natural Hedge 手法にデルタヘッジと組み合わせることにより改善された結果が得られた。

5. 参考文献

- [1] Bernard, C. & Boyle, P.P. (2011). A Natural Hedge for Equity Indexed Annuities. *Annals of Actuarial Science*, 5, 211-230.
- [2] 高岡 和佳子 (2009). 変額年金保険に何が起こったか. ニッセイ基礎研 REPORT, July 2009.
- [3] The Life Insurance Association of Japan. (Ed.) (2013). Major Business Trends, *Summary of Life Insurance Business 2012 version*. The Life Insurance Association of Japan.