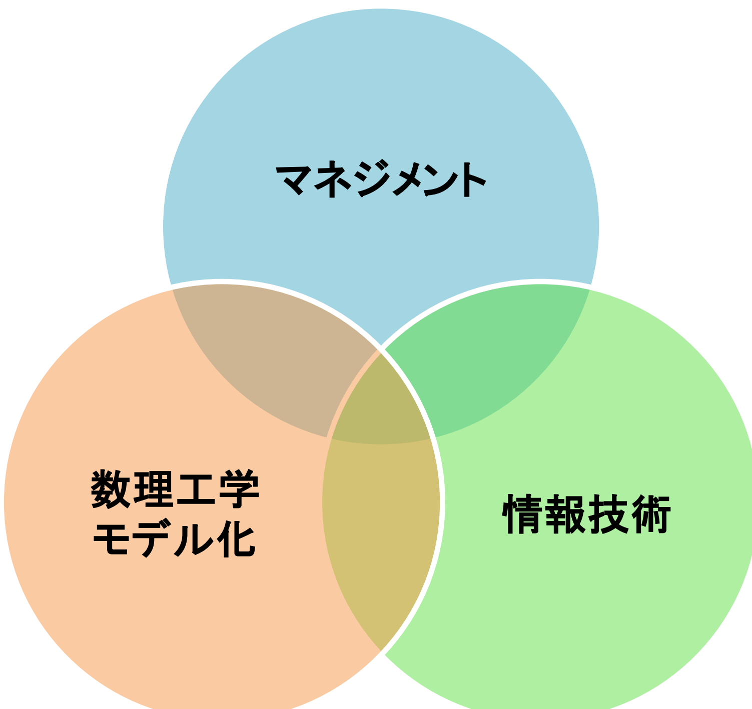
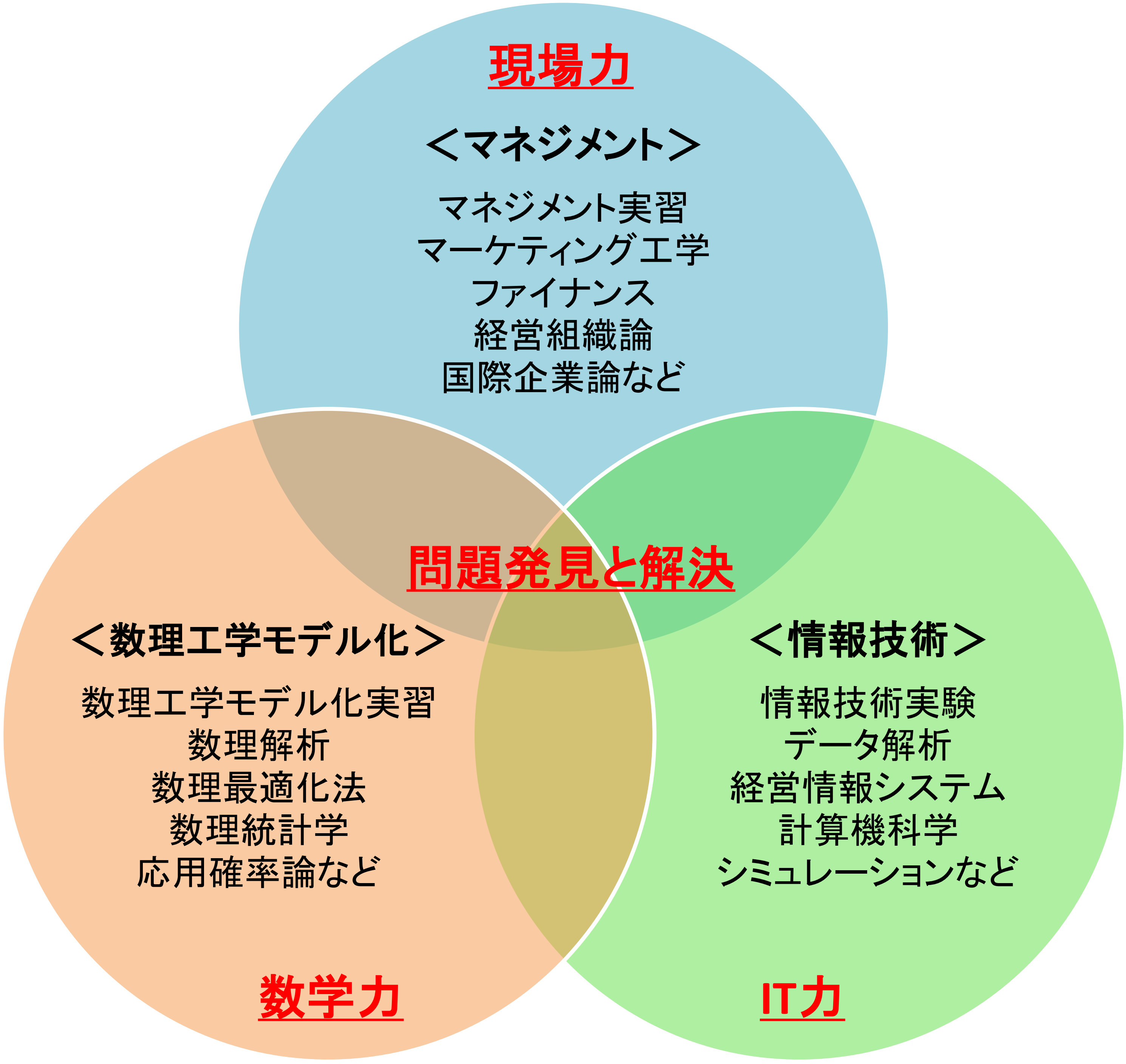
筑波大学オープンキャンパス模擬講義2021

理工学群　社会工学類
経営工学主専攻
准教授 Phung-Duc Tuan

経営工学主専攻

- 現在、**企業をはじめとする組織体の管理・運営・意思決定**は、ますます**情報技術（IT）**を基盤とする方向に進んでいます。
- 経営工学主専攻では、世界で通用する「**数学力**×**IT力**×**現場力**」を身につけた科学的社会人の育成を目指しています。





現場力
＜マネジメント＞
マネジメント実習
マーケティング工学
ファイナンス
経営組織論
国際企業論など
問題発見と解決
＜数理工学モデル化＞
数理工学モデル化実習
数理解析
数理最適化法
数理統計学
応用確率論など
＜情報技術＞
情報技術実験
データ解析
経営情報システム
計算機科学
シミュレーションなど
数学力
IT力

最適経営のプロになれ！

経営工学主専攻

待ち現象の数理モデル
−−待ち行列モデル−−

数理モデルの一例

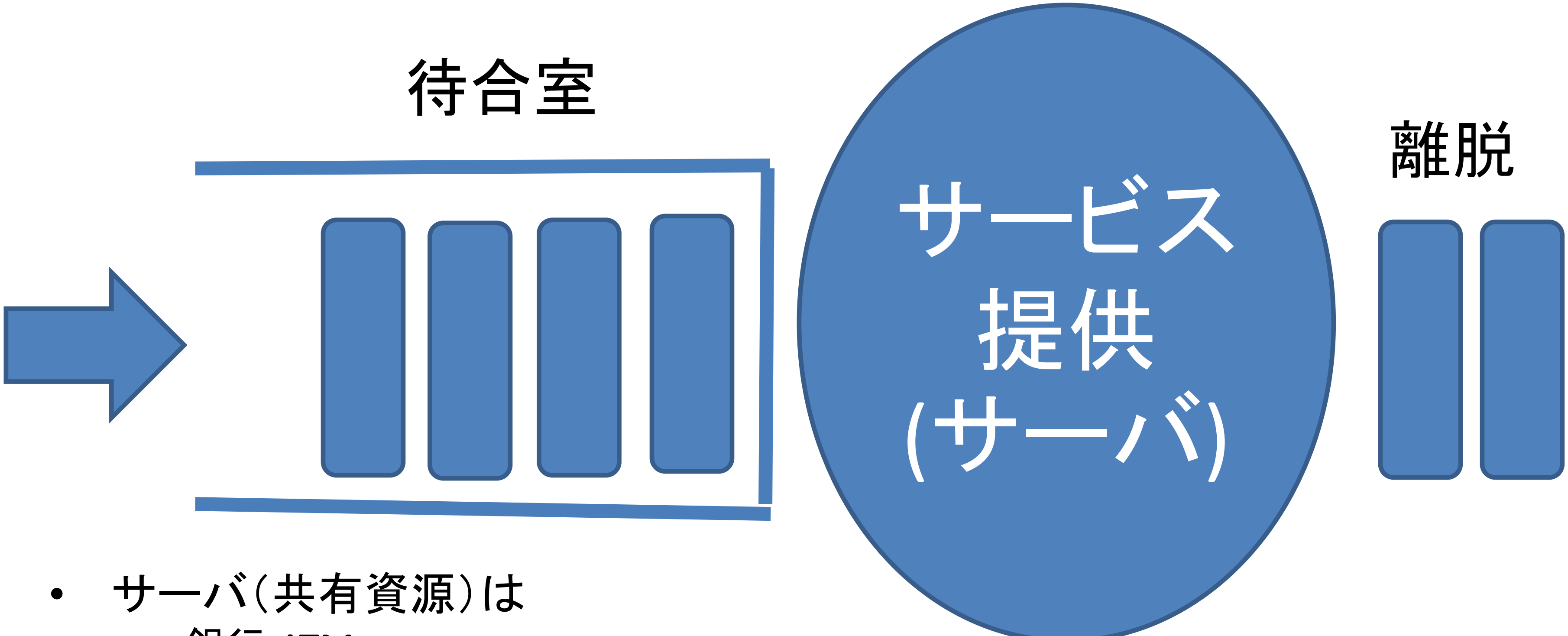
待ち行列

- 日常生活のサービス
  - 銀行ATM
  - スーパーのレジ
  - 空港
  - 通信
  - 道路など
- 客がランダムに到着
- 何らかのサービスを受ける
  - ランダムな時間
- 客がサービス後に離脱

なぜ待ち行列が発生するの？

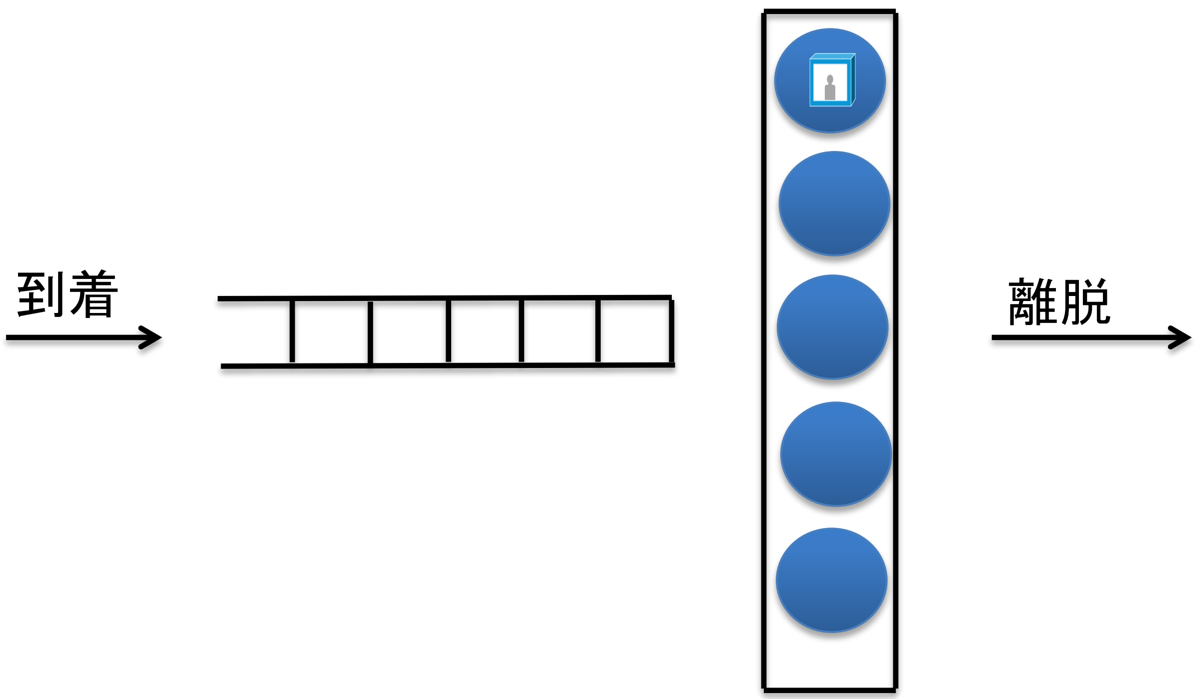
- 空港
  - チェックインカウンター数が有限
  - チェックインするのに時間がかかる
  - 滑走路が有限
  - 離陸する時間が必要
- 銀行ATM
  - 操作時間がかかる
  - ATMの台数が有限
- 博物館
  - チケットカウンターの数が有限
  - チケットを買うのに時間がかかる
- 通信システム
  - 通信機器の処理能力の限界
  - 無線資源が有限⇒例えば:無線は7Gを超えると速度制限（某会社）

待ち行列モデル

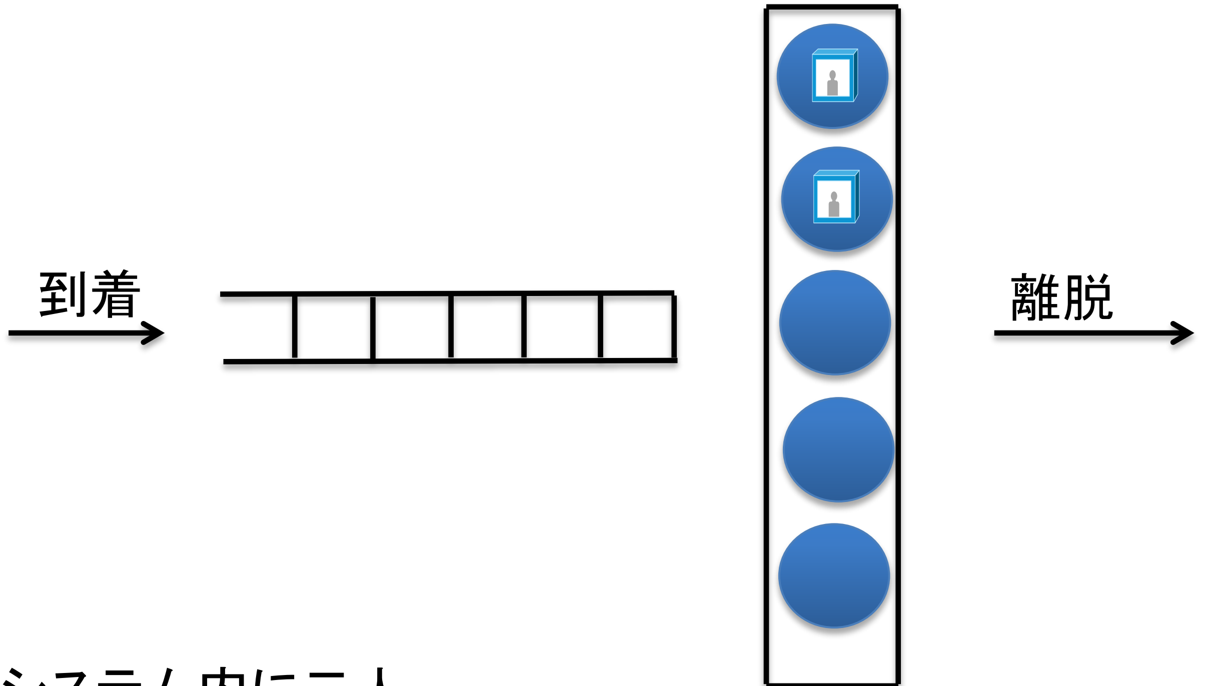


- サーバ(共有資源)は
  - 銀行:ATM
  - 空港:チェックインカウンター, セキュリティ, 滑走路
- 客は
  - 実際にサービスを受ける人やモノ(飛行機)
- 待合室は
  - 銀行:客の列
  - 空港:チェックイン客, 離陸待ちの飛行機の列

複数サーバモデル

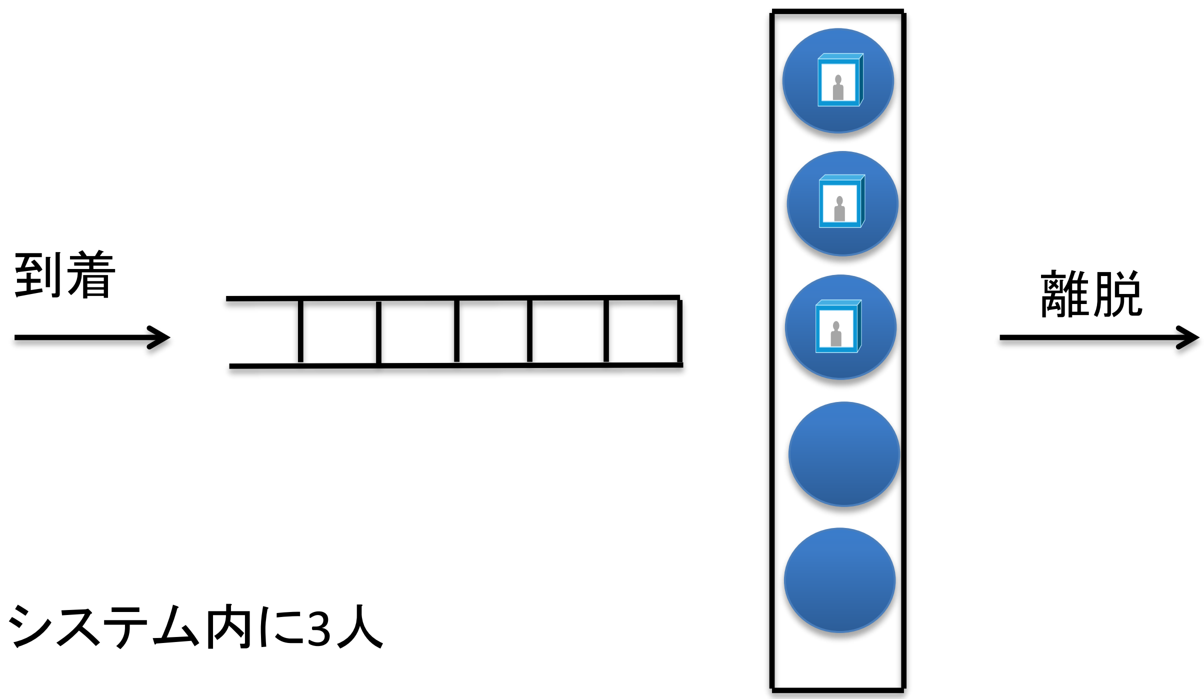


複数サーバモデル

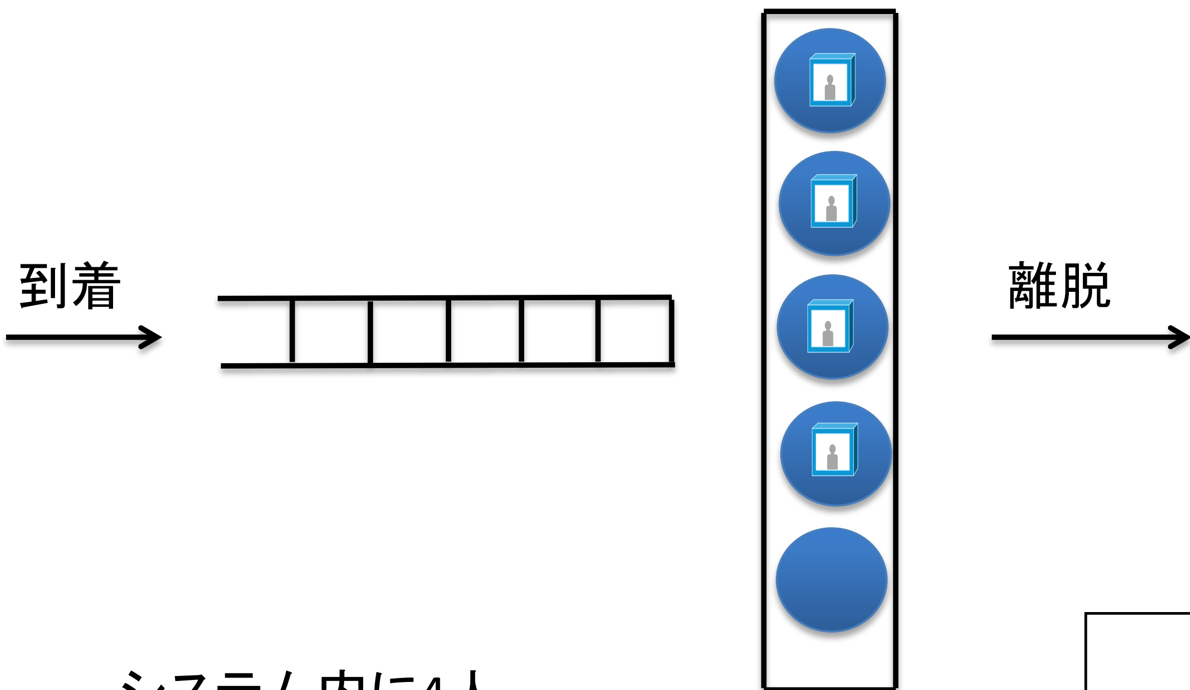


システム内に二人

複数サーバモデル

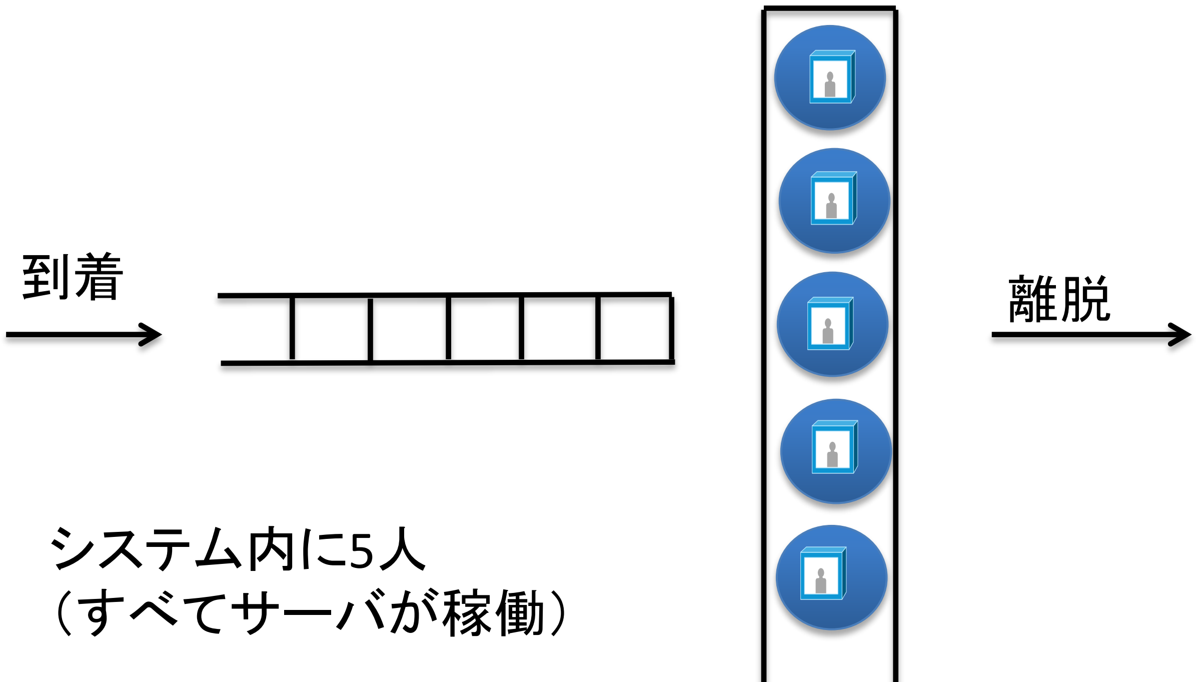


複数サーバモデル

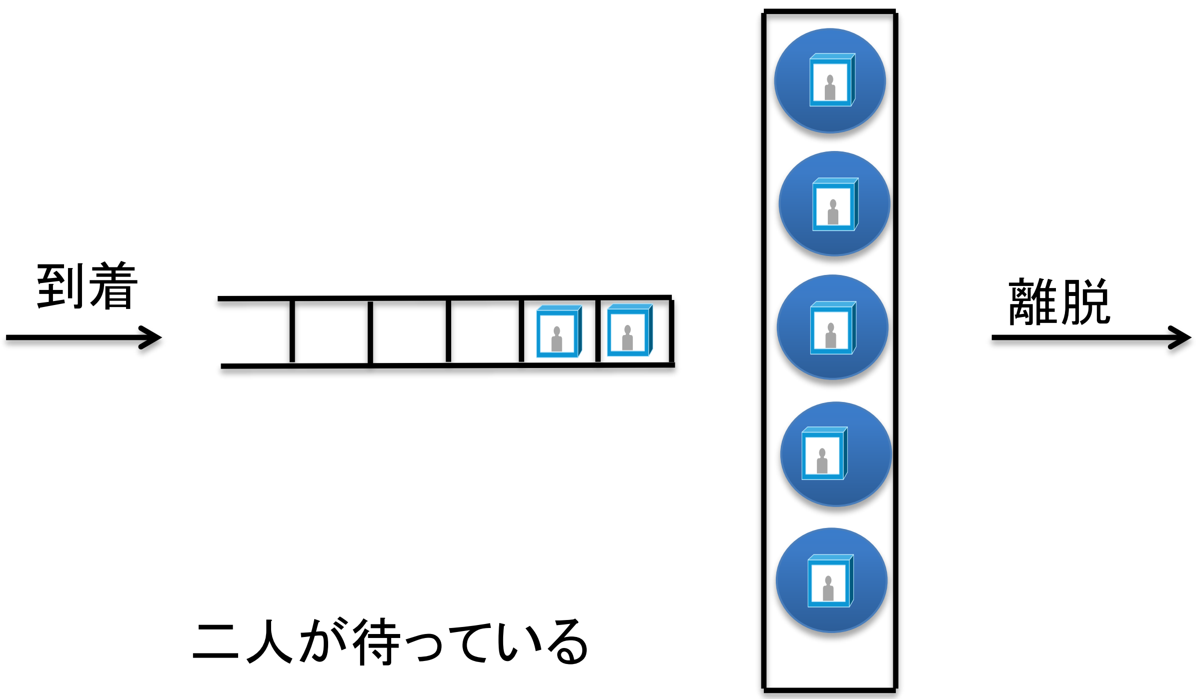


システム内に4人

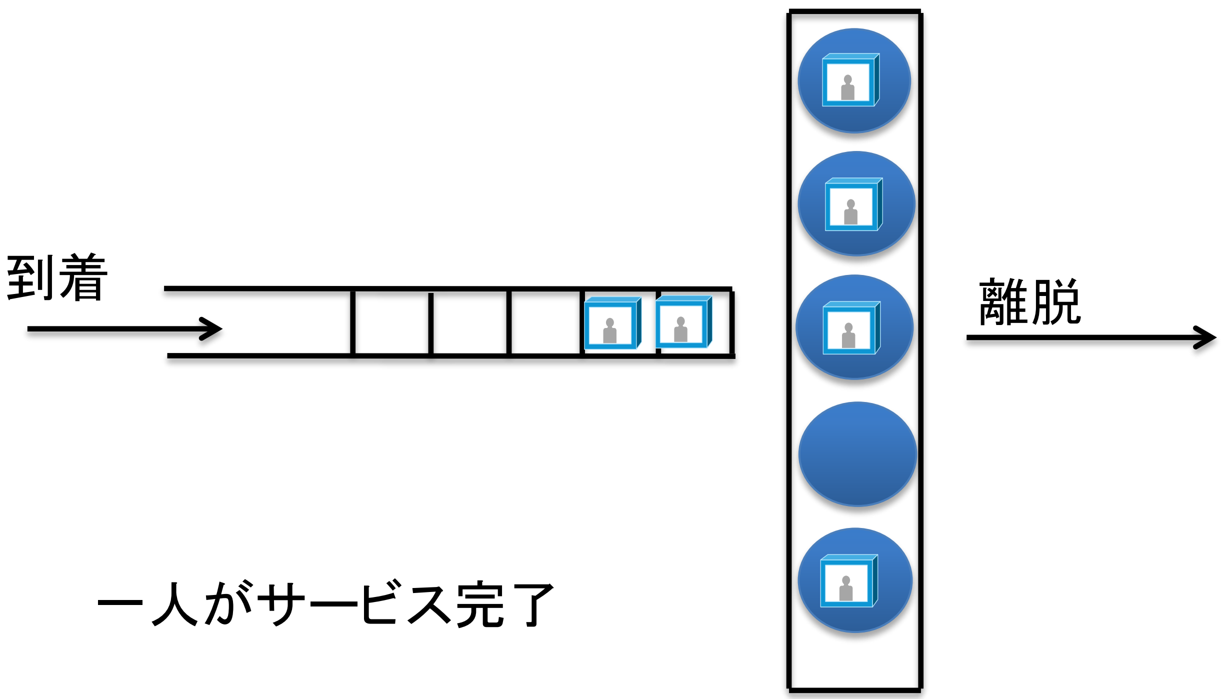
複数サーバモデル



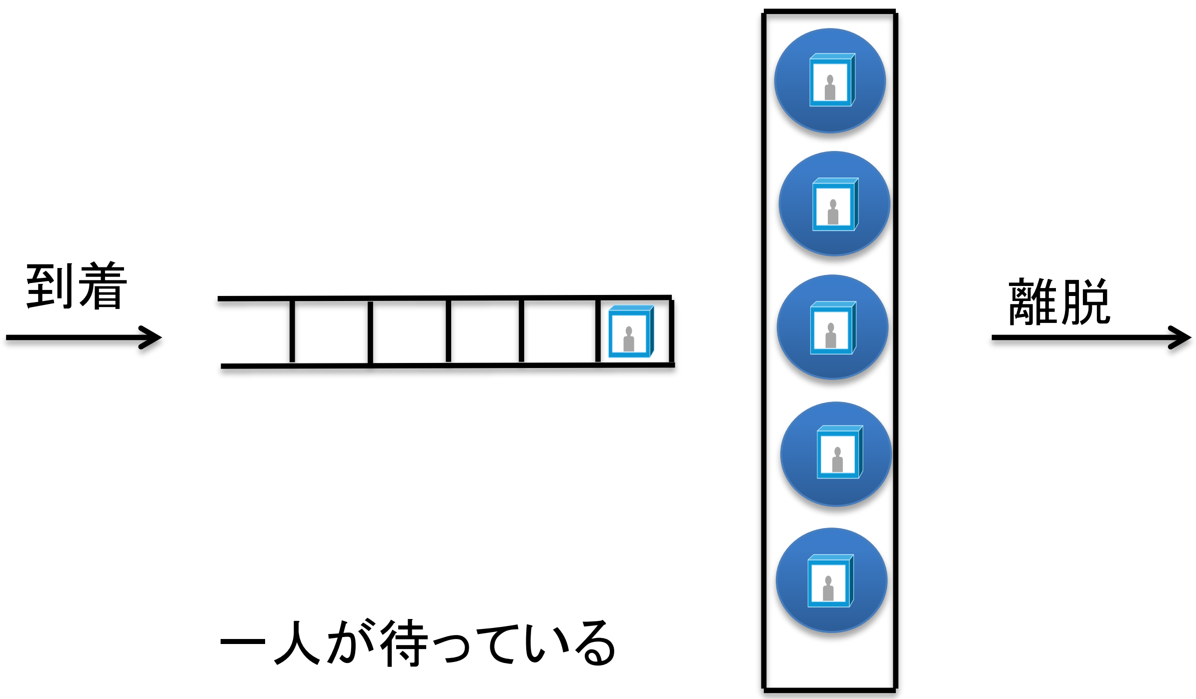
複数サーバモデル



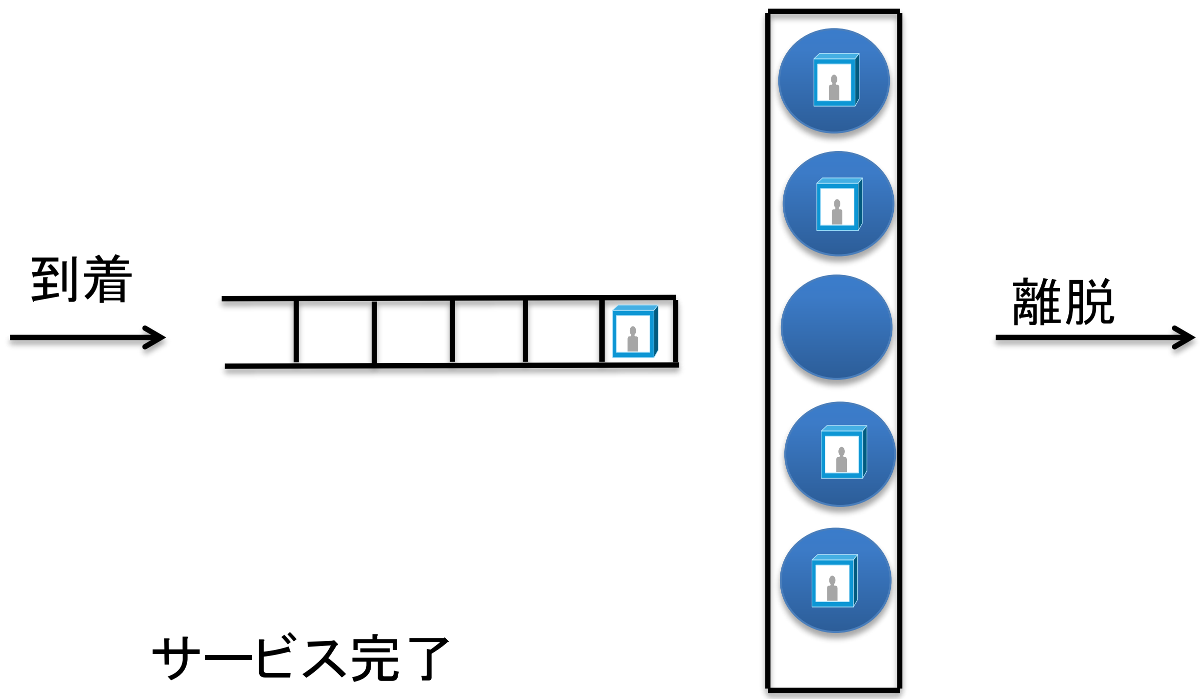
複数サーバモデル



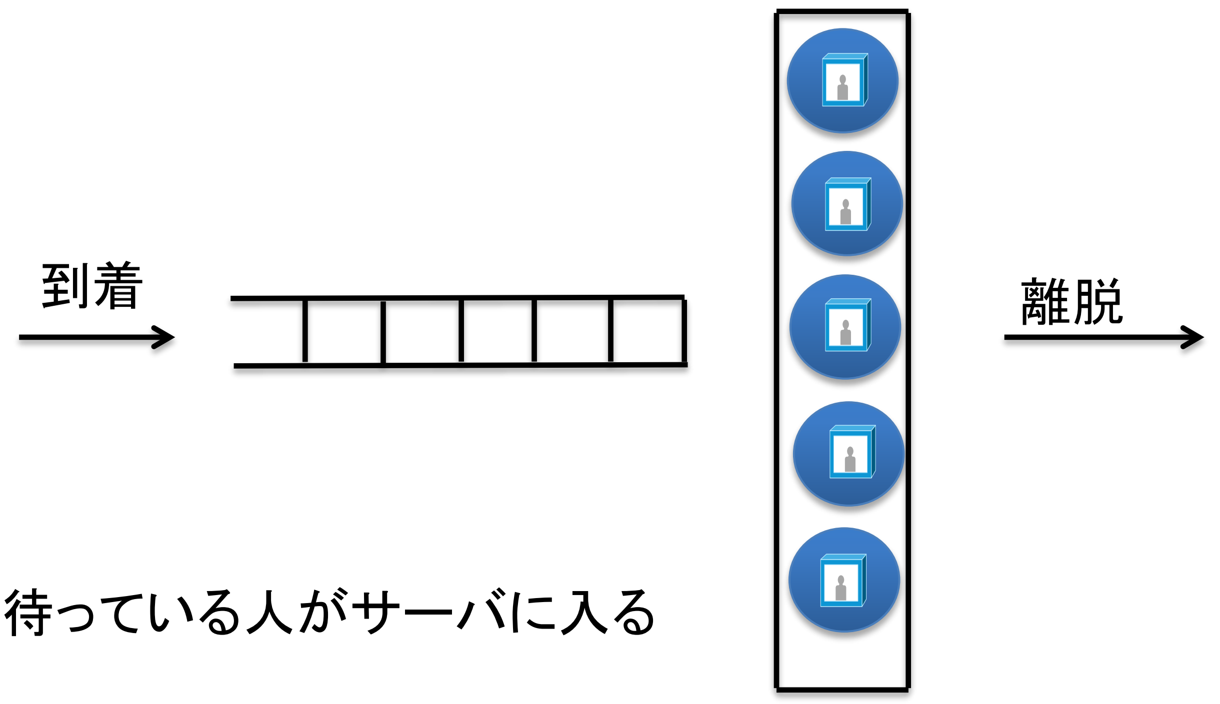
複数サーバモデル



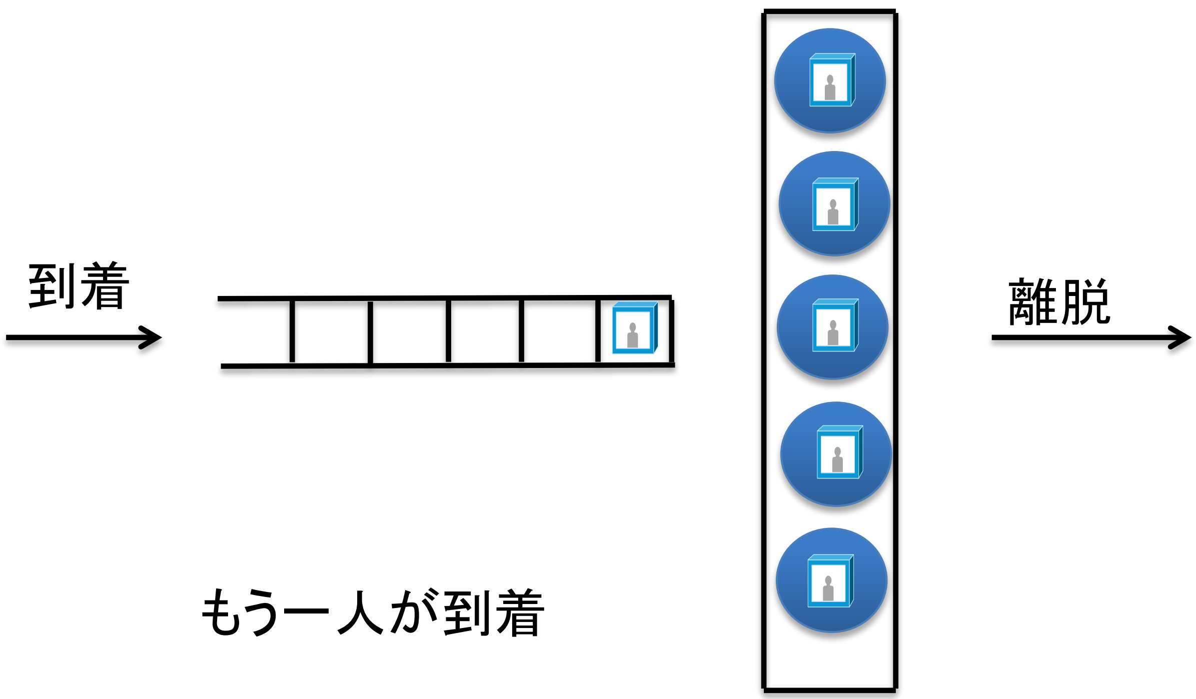
複数サーバモデル



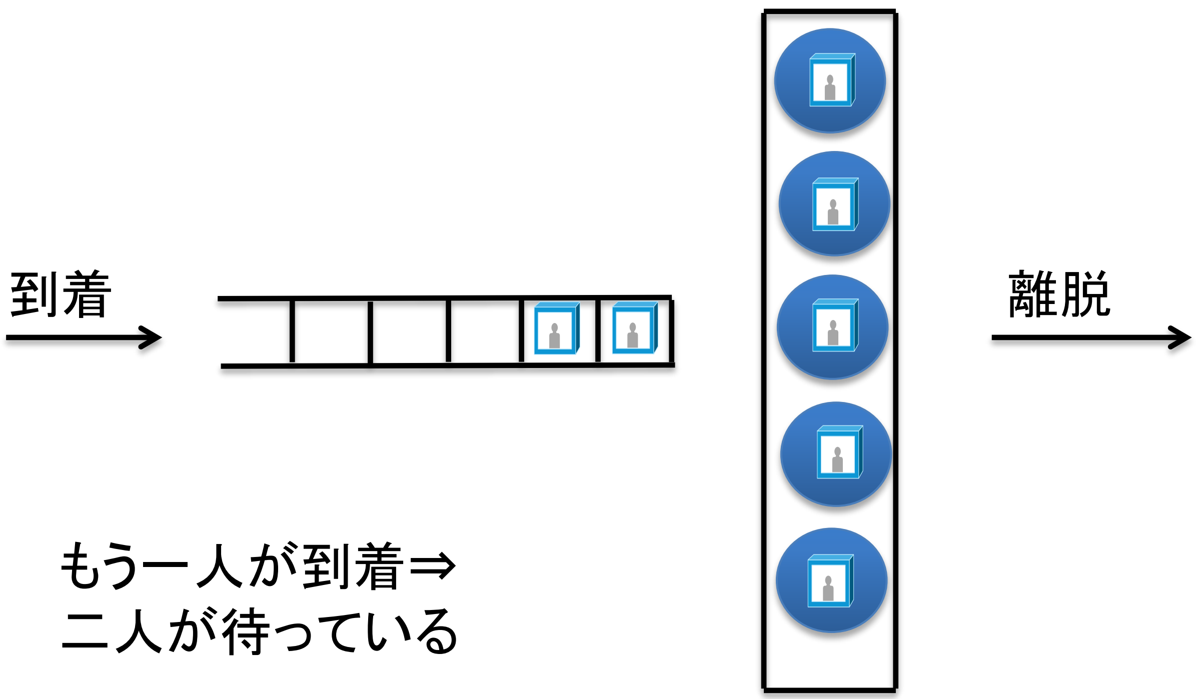
複数サーバモデル



複数サーバモデル



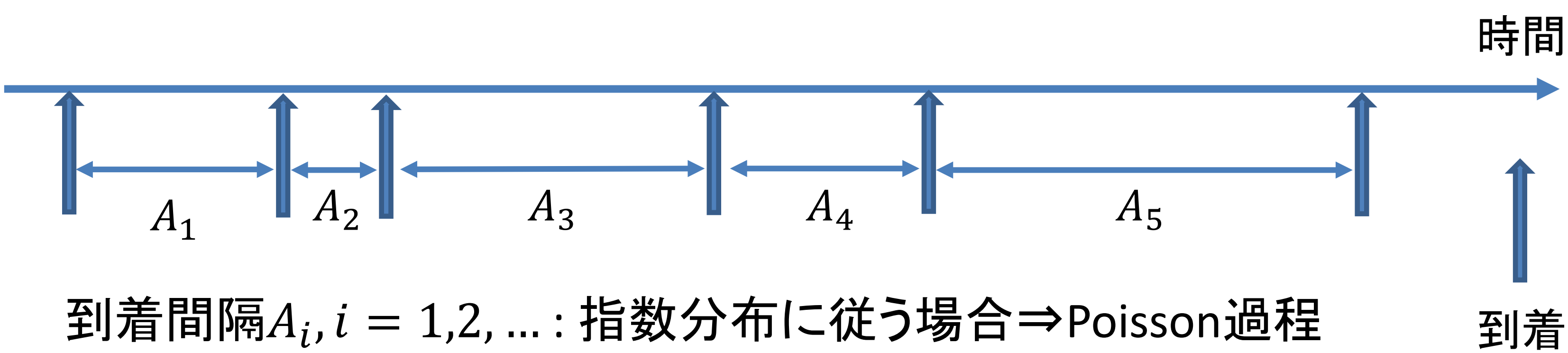
複数サーバモデル



もう一人が到着⇒
二人が待っている

到着過程のモデル化

- 客が連続して到着⇒到着間隔が短い場合
- 長い間に客の到着なし⇒到着間隔が長い
- 単純な方法
  - 到着間隔がランダム ⇒ 確率変数で表現
  - Poisson過程: 到着間隔が指数分布に



到着間隔$A_i, i = 1,2,\ldots$: 指数分布に従う場合⇒Poisson過程

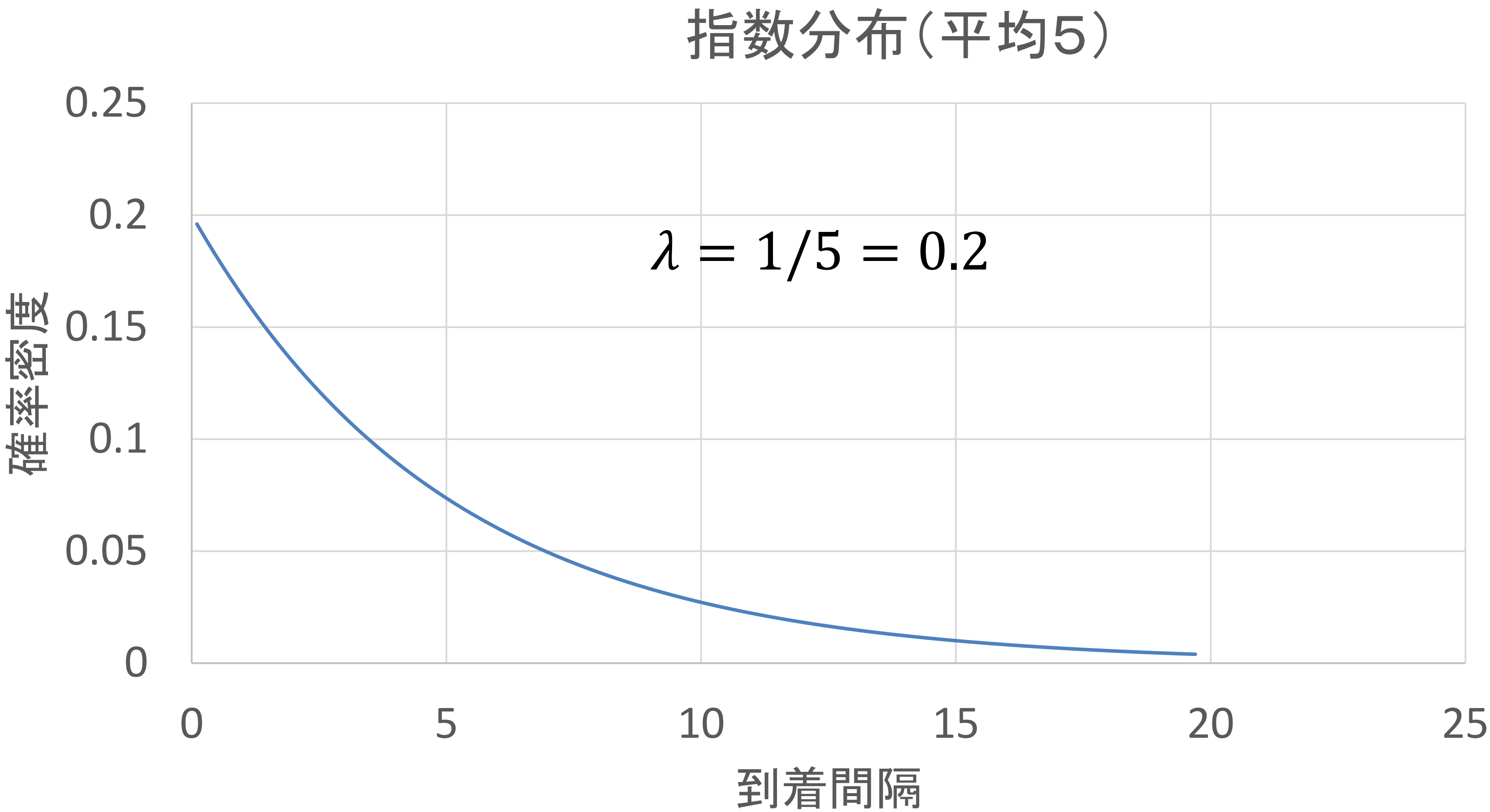
到着過程: Poisson分布

- パラメータλのPoisson過程: 表現の**方法1**
  - 到着間隔: パラメータλの指数分布に
- パラメータλのPoisson過程: 表現の**方法2**
  - $N(t)$: $(0,t]$:この区間の到着数
  - $P(N(t)=k)= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$:Poisson分布に
- 証明: X（到着間隔）
  - $P(X>t)=P(\ (0,t]$ に到着なし$)=P(N(t)=0\ )=e^{-\lambda t}$
  - $P(X\le t)=1-e^{-\lambda t}$
  - X は指数分布に

何故Poisson過程なのか？

- 大学内にn人がいて12:00~13:00に確率pで食堂へ
- n は非常に大きい, pは非常に小さい! 平均客数 np
- 食堂における客数 ~ 二項分布: $B(n, p)$
  - $P(X = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$, 平均: np
- 二項分布の極限⇒Poisson分布
  - $\lambda = np, n \to \infty, p \to 0, \lim_{n\to\infty} P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$
- Poisson過程（パラメータ λ)
  - $N(t)$: $(0, t]$における到着数
  - $P(N(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$

指数分布(密度関数: $\lambda e^{-\lambda x}$)



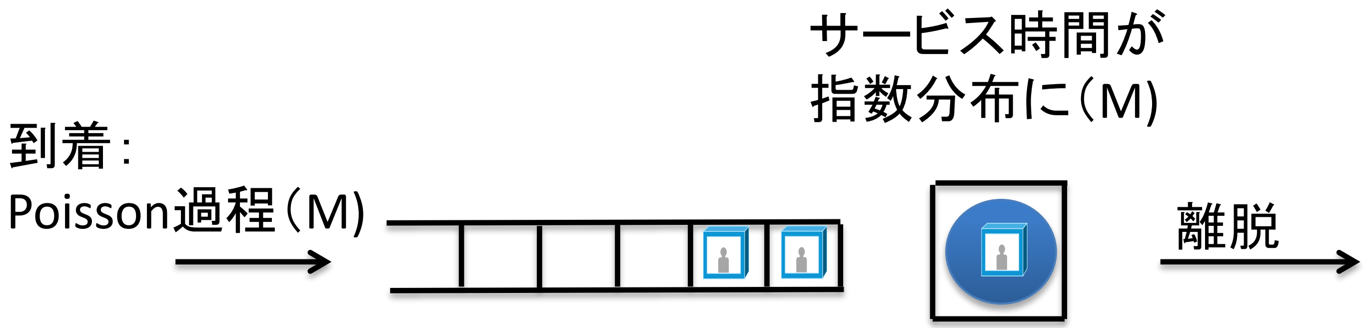
サービス時間のモデル化

- サービス時間が長い場合（レジの例：爆買い客）
- サービス時間が短い場合（レジの例：一つの商品だけ購入客）
- サービス時間を確率変数で表現
  - 例：指数分布（M），任意の分布（G）

S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 S_6

S_iはi番目の客のサービス時間

単一サーバモデルM/M/1



到着過程:M(Poisson),平均到着間隔$1/\lambda$
サービス時間分布:M(平均$1/\mu$の指数分布)
サーバ数:1(単一サーバ)

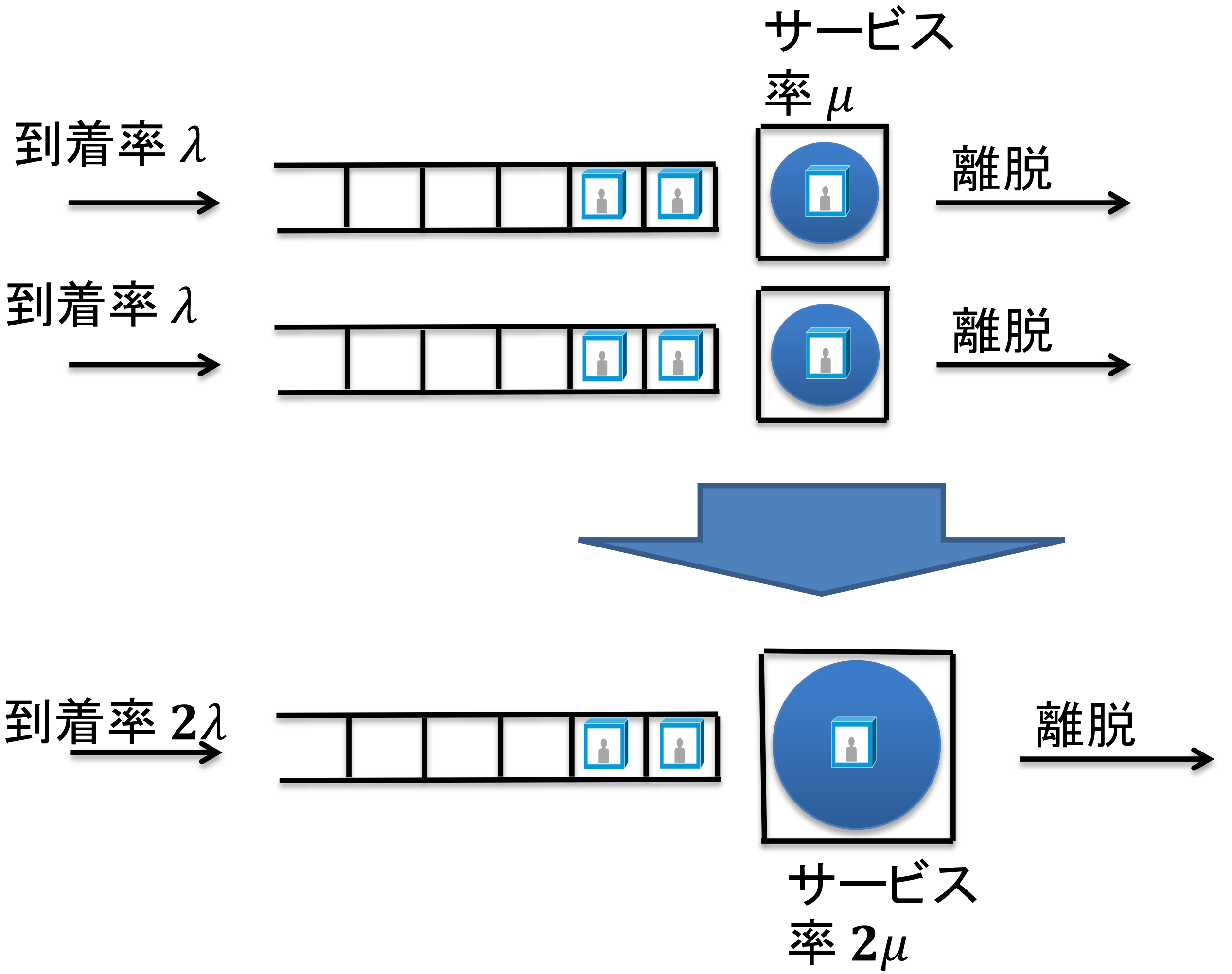
M/M/1モデルの結果

- 安定条件：並ぶ客数が無限に発散しないための条件
  - $\lambda < \mu$
    - 単位時間当たりの到着数　＜　単位時間当たりのサービス数
  - $\rho = \lambda/\mu < 1.$
- 系内客数(N)の分布
  - $P(N = n) = (1-\rho)\rho^n, n = 0,1,2 \ldots$ ⇒幾何分布
- 平均系内客数
  - $E[N] = \frac{\rho}{1-\rho}$, 例：$\rho$=0.8 ⇒ $E[N] = 4$
- 平均応答時間
  - $E[T] = \frac{1}{1-\rho}\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu-\lambda}$=> $\mu = 5, \lambda = 4 \Rightarrow E[T] = 1$

規模の経済: $\lambda \to a\lambda, \mu \to a\mu \Rightarrow E\left[T^{(a)}\right] = \frac{E[T]}{a}$

応答時間がa倍早くなる！！！

規模の経済



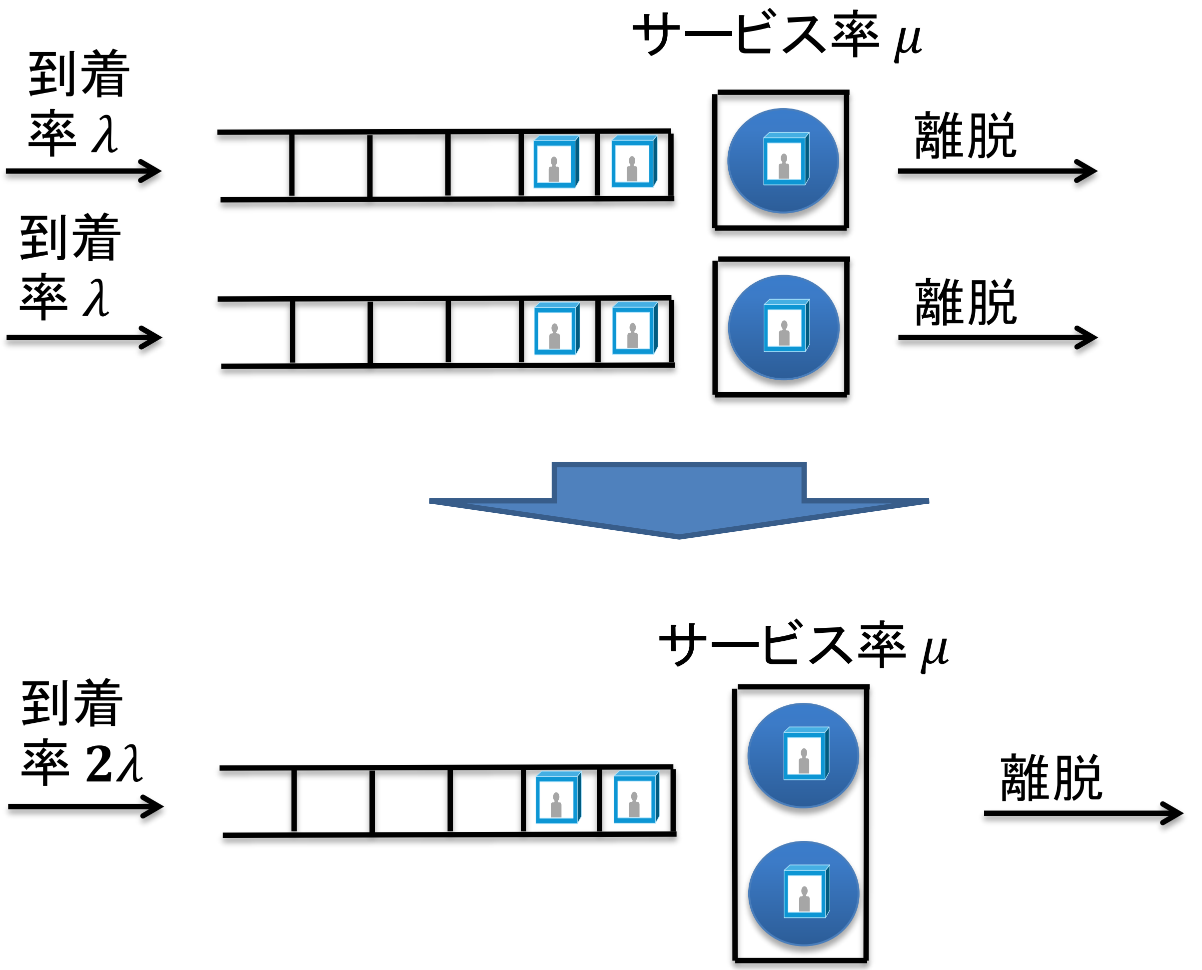
平均応答時間:

$$\frac{1}{\mu - \lambda}$$

平均応答時間:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\mu - \lambda}$$

規模の経済



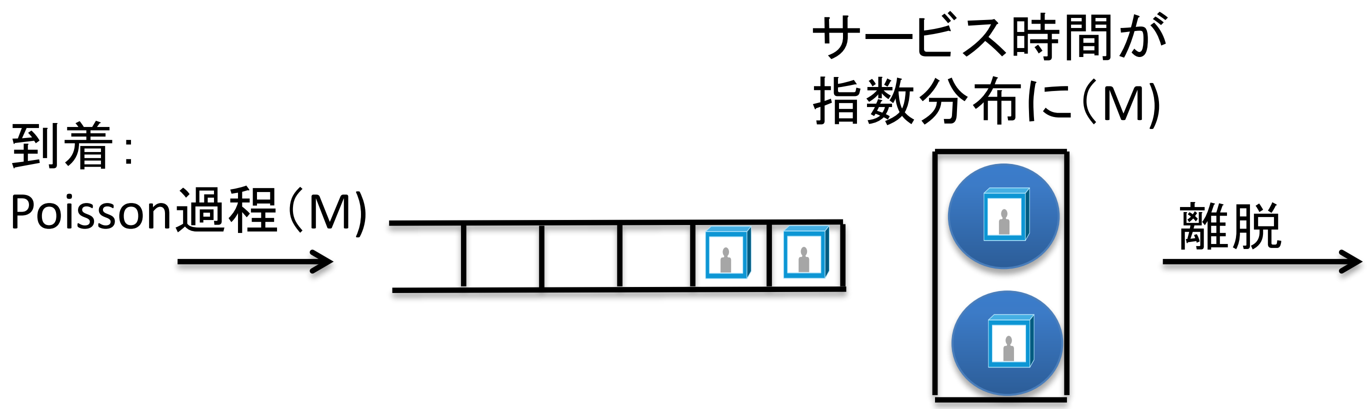
平均応答時間:

$$\frac{1}{\mu - \lambda}$$

平均応答時間:

？？

M/M/2モデル

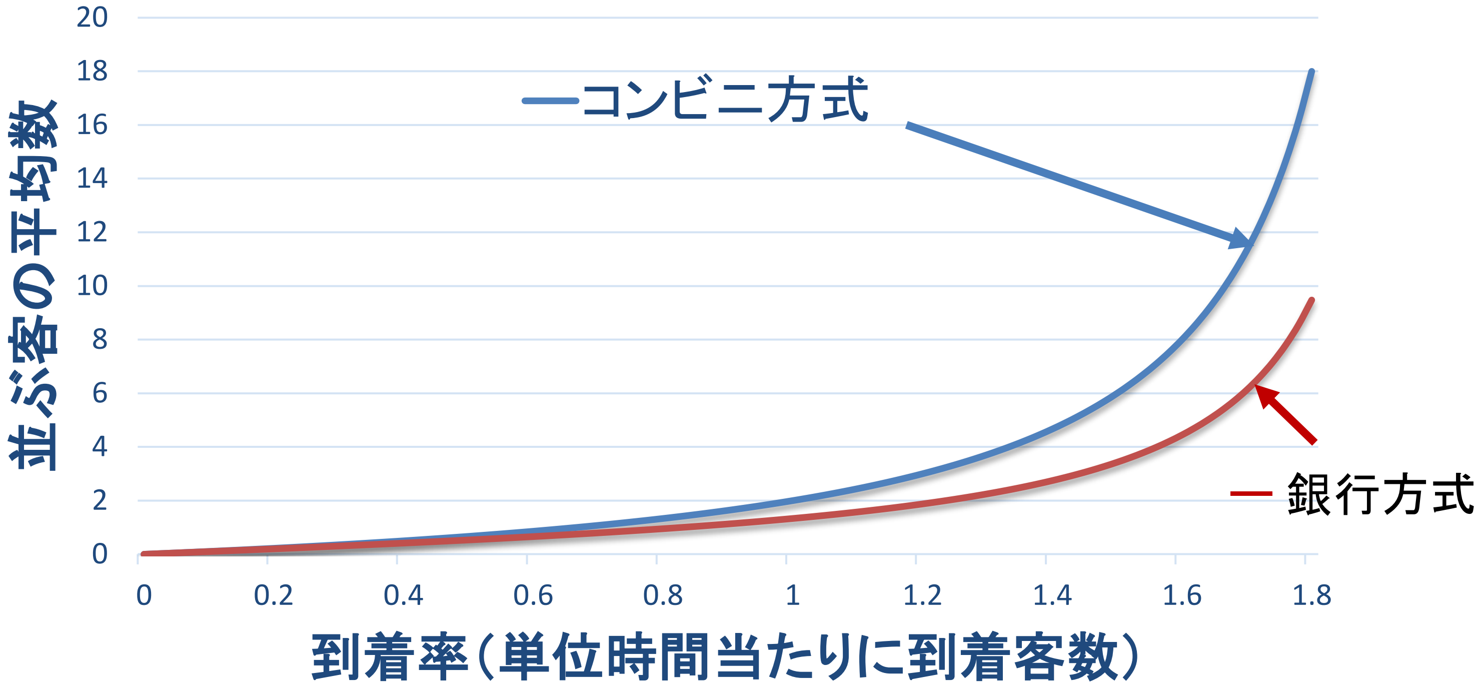


到着過程:M(Poisson),平均到着間隔$1/\lambda$
サービス時間分布:M(指数分布),平均$1/\mu$
サーバ数:2(2サーバモデル)

2サーバモデル（M/M/**2**）の結果

- 安定条件: 待ち行列が無限に長くならない条件
  - $\lambda < \mathbf{2}\mu, \quad \rho = \lambda/\mu < \mathbf{2}$.
  - 単位時間：平均到着数 ＜ 平均サービス数（最大）
- 平均系内客数
  - $E[N] = \frac{4\rho}{4-\rho^2}$
- 平均応答時間: 到着してから離脱するまで
  - $E[T] = \frac{E[N]}{\lambda} = \frac{4}{4-\rho^2}\frac{1}{\mu}$

待ち行列理論

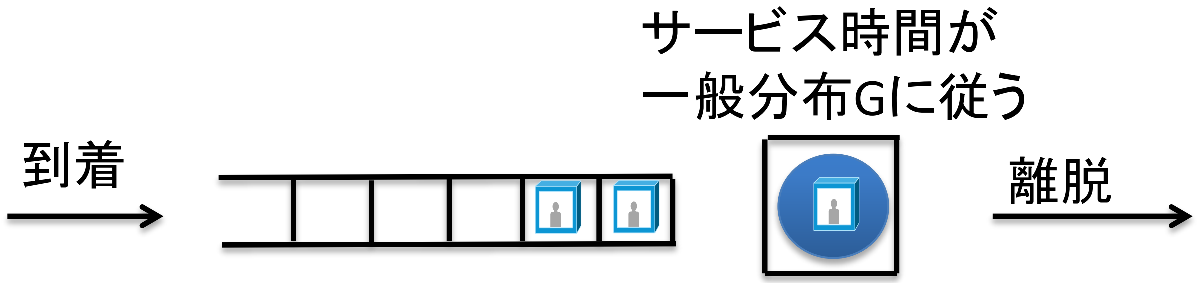


いくつかの仮定の下で！！！

M/G/1モデル

到着：M（Poisson過程）
サービス時間：G（任意分布）
サーバ数：単一サーバ

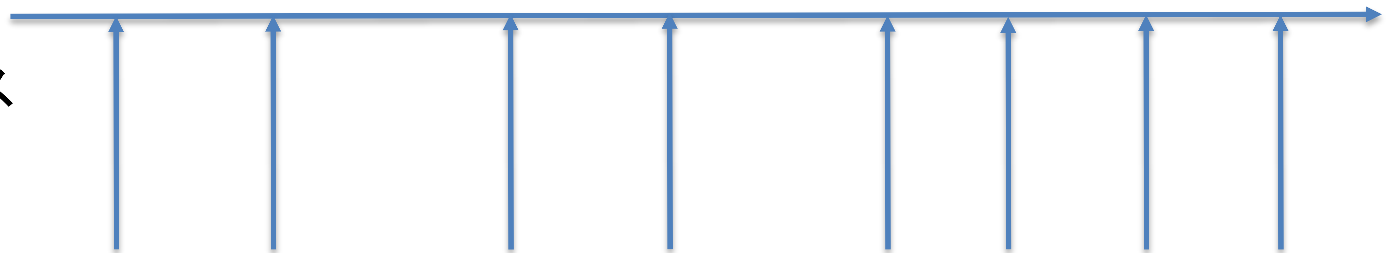
単一サーバモデル（M/G/1）



到着：M（Poisson過程）
サービス時間：G（任意分布）
サーバ数：単一サーバ

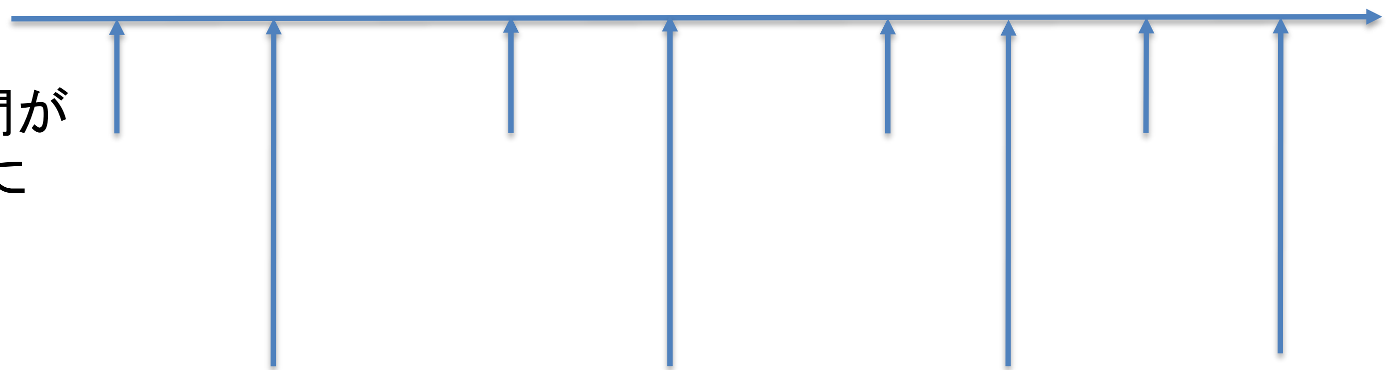
サービス時間分布の影響

全員サービス
時間が2!!
=> 平均 = 2.



サービス時間: 全員が2

サービス時間が
1と3が交互に
=> 平均 = 2



サービス時間: 1 & 3 が交互に

M/G/1 モデル

- 到着過程：Poisson過程 λ
- サービス時間Sが一般分布に
- 平均待ち時間: **Pollaczek-Khintchine公式**
  - $E[W] = \frac{\lambda \mathrm{E}[S^2]}{2(1-\lambda \mathrm{E}[S])} = \frac{\lambda(\mathrm{Var}(S)+\mathrm{E}[S]^2)}{2(1-\lambda \mathrm{E}[S])}$
  - 分散$\mathrm{Var}(S) \geq 0.$
  - 同じ平均ならば分散がゼロの一定サービス時間が一番平均待ち時間が最小
  - 通信パケットが一定の長さを
  - 空港での入国審査：国内客の列と外国人客の列