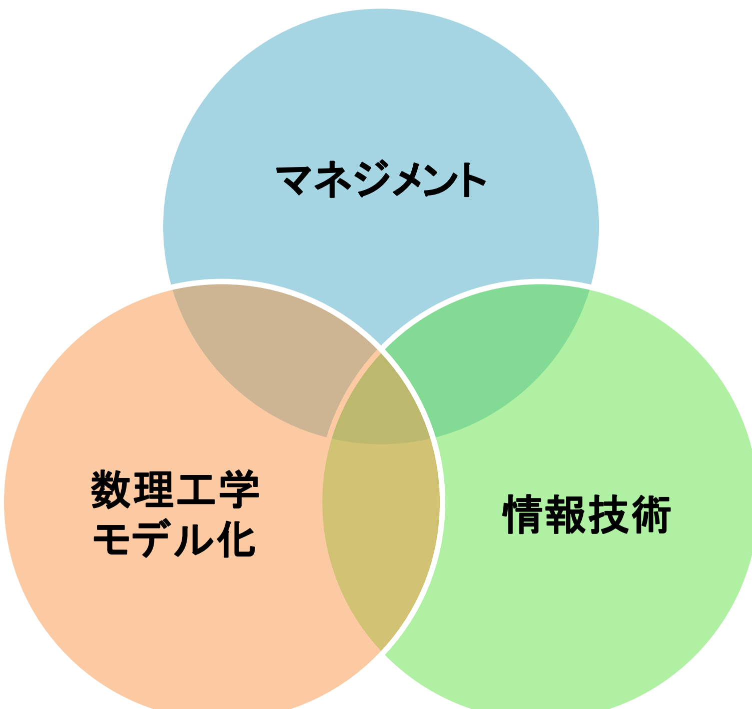
オープンキャンパス2025(夏)
模擬講義
待ち現象の数理モデル
--待ち行列モデル--

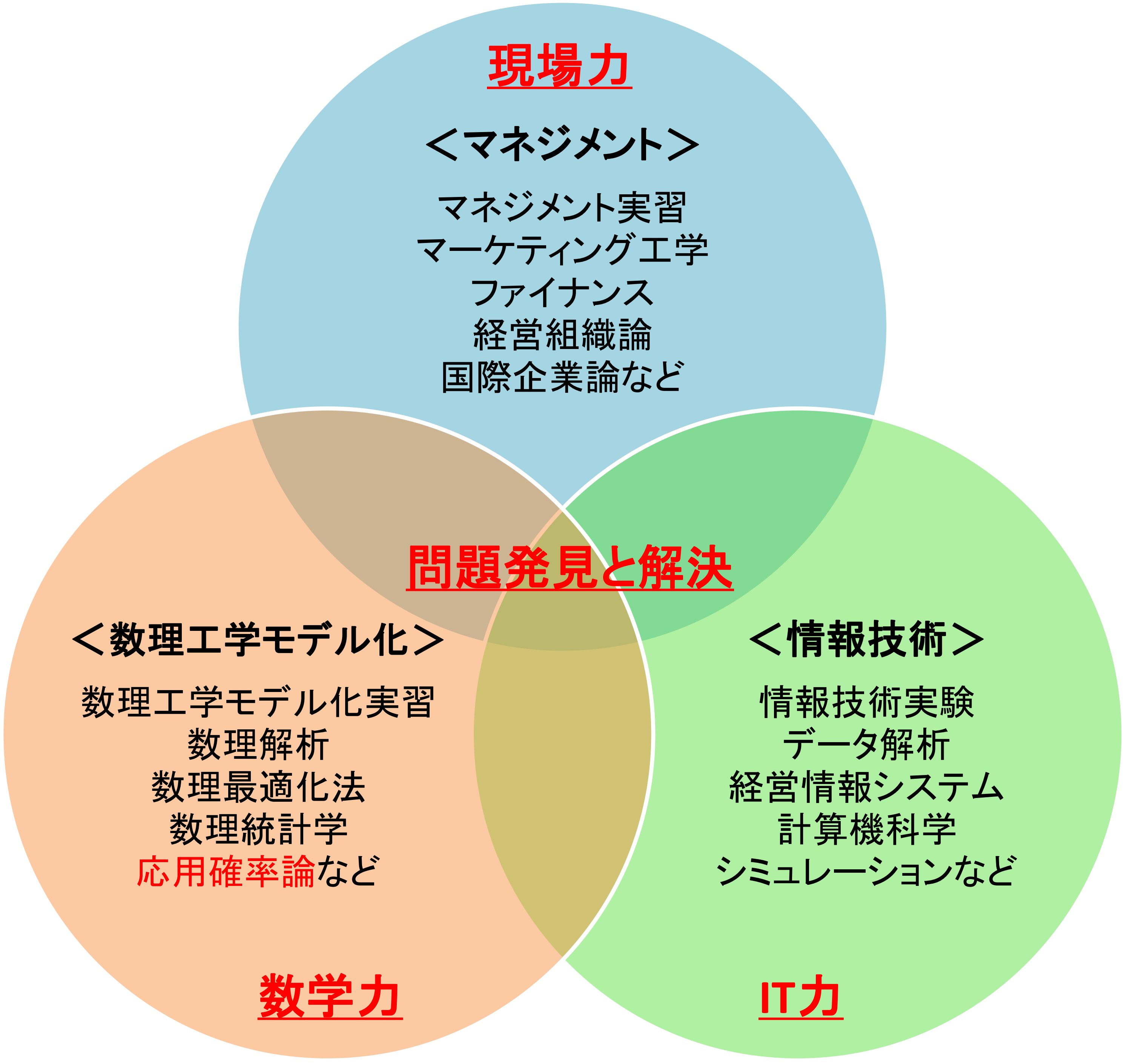
筑波大学　理工学群　社会工学類
経営工学主専攻
Phung-Duc Tuan

２０２５年７月２７日＠筑波大学、つくば市

経営工学主専攻

- 現在、**企業をはじめとする組織体の管理・運営・意思決定**は、ますます**情報技術（IT）**を基盤とする方向に進んでいます。
- 経営工学主専攻では、世界で通用する「**数学力**×**IT力**×**現場力**」を身につけた科学的社会人の育成を目指しています。




現場力
＜マネジメント＞
マネジメント実習
マーケティング工学
ファイナンス
経営組織論
国際企業論など
問題発見と解決
＜数理工学モデル化＞
数理工学モデル化実習
数理解析
数理最適化法
数理統計学
応用確率論など
＜情報技術＞
情報技術実験
データ解析
経営情報システム
計算機科学
シミュレーションなど
数学力
IT力

待ち現象の数理モデル
--待ち行列モデル--

数理モデルの一例

待ち行列

- 日常生活のサービス
  - 銀行ATM
  - スーパーのレジ
  - 空港
  - 通信
  - 道路など
- 客がランダムに到着
- 何らかのサービスを受ける
  - ランダムな時間
- 客がサービス後に離脱

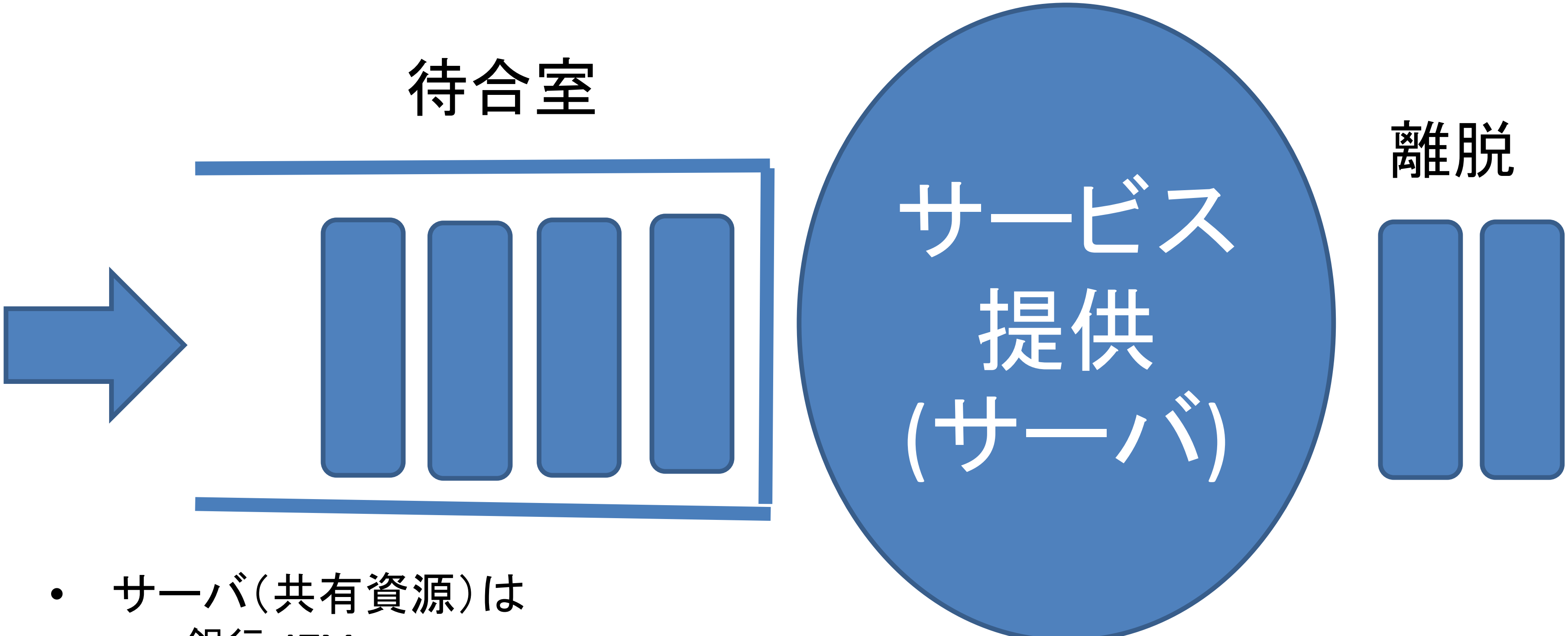
なぜ待ち行列が発生するの？

- 空港
  - チェックインカウンター数が有限
  - チェックインするのに時間がかかる
  - 滑走路が有限
  - 離陸する時間が必要
- 銀行ATM
  - 操作時間がかかる
  - ATMの台数が有限
- 博物館
  - チケットカウンターの数が有限
  - チケットを買うのに時間がかかる

有限リソース

ランダム性
（到着、サービス時間）

待ち行列モデル



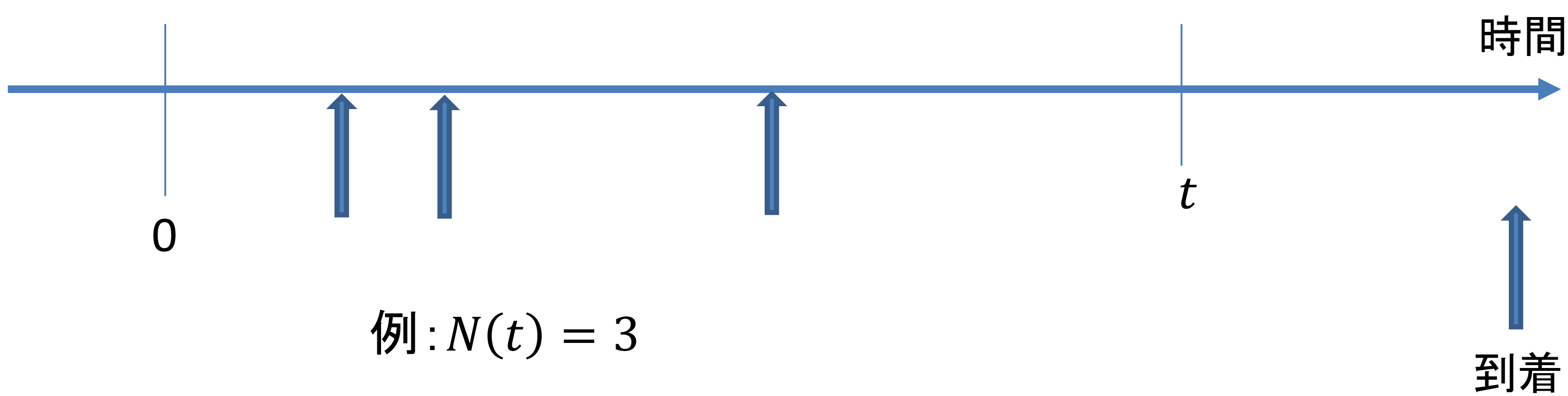
- サーバ（共有資源）は
  - 銀行:ATM
  - 空港:チェックインカウンター, セキュリティ, 滑走路
- 客は
  - 実際にサービスを受ける人やモノ（飛行機）
- 待合室は
  - 銀行：客の列
  - 空港：チェックイン客，離陸待ちの飛行機の列

到着の数理モデル化

Poisson分布

到着過程: Poisson分布

- パラメータλのPoisson過程: 表現
  - $N(t)$: $(0, t]$:この区間の到着数
  - $P(N(t) = k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$:Poisson分布に
  - 単位時間当たりに到着客数の平均:λ



何故Poisson過程なのか？

- 大学内にn人がいて12:00~13:00に確率pで食堂へ
- n は非常に大きい, pは非常に小さい! 平均客数 np
- 食堂における客数 ~ 二項分布: $B(n,p)$
  - $P(X=k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}\,p^k(1-p)^{n-k}$, 平均: np
- 二項分布の極限⇒Poisson分布
  - $\lambda = np, n\to\infty, p\to 0, \lim_{n\to\infty} P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$
- Poisson過程（パラメータ λ)
  - $N(t)$: $(0,t]$における到着数
  - $P(N(t)=k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$

何故Poisson過程なのか？

- 食堂における客数 ~ 二項分布: $B(n,p)$
  - $P(X=k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$, 平均: np
- 二項分布の極限⇒Poisson分布
  - $\lambda = np, n\to\infty, p\to 0$
  - $P(X=k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-k}{n}=1,\qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}=1,\ \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{n}{-\lambda}}\right]^{-\lambda}=e^{-\lambda}$$

  - よって、$\lim_{n\to\infty}P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ (Poisson分布）！
- Poisson過程（パラメータ λ)
  - $N(t)$: $(0,t]$における到着数
  - $P(N(t)=k)=\ e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$

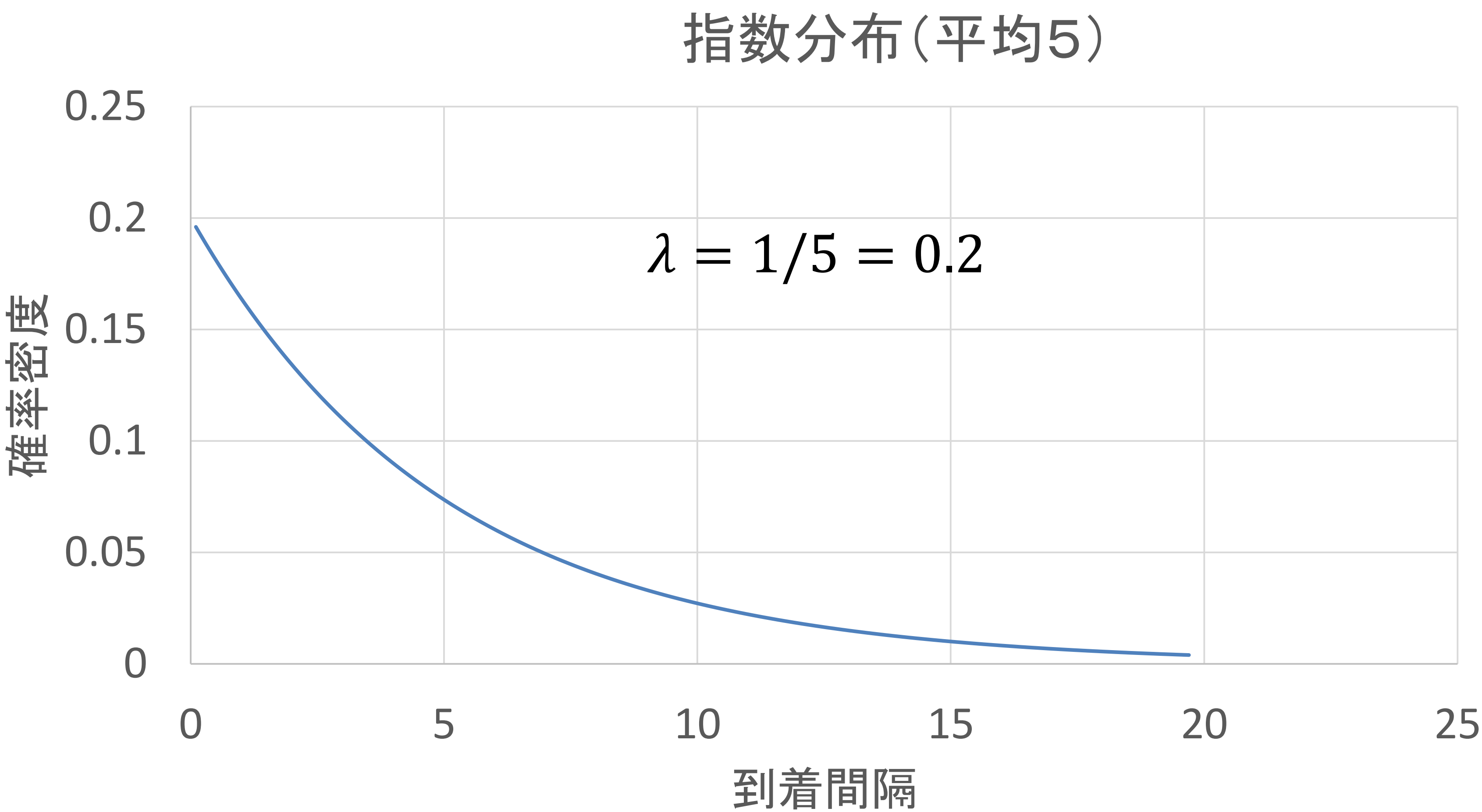
サービス時間のモデル化

- サービス時間が長い場合（レジの例：爆買い客）
- サービス時間が短い場合（レジの例：一つの商品だけ購入客）
- サービス時間を確率変数で表現
  - 例：指数分布（M），任意の分布（G）

S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 S_6

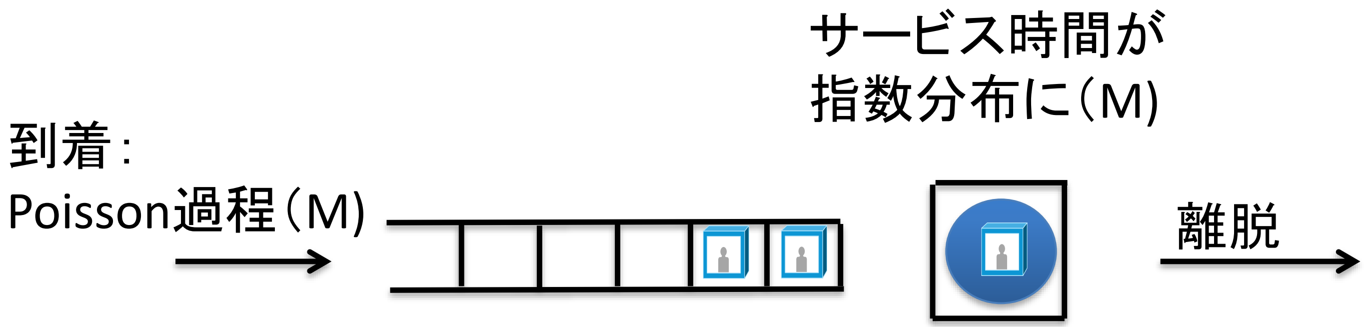
S_iはi番目の客のサービス時間

指数分布(密度関数: $\lambda e^{-\lambda x}$)



確率変数Sがパラメータλの指数分布に従う: $P(S < x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0$

単一サーバモデルM/M/1



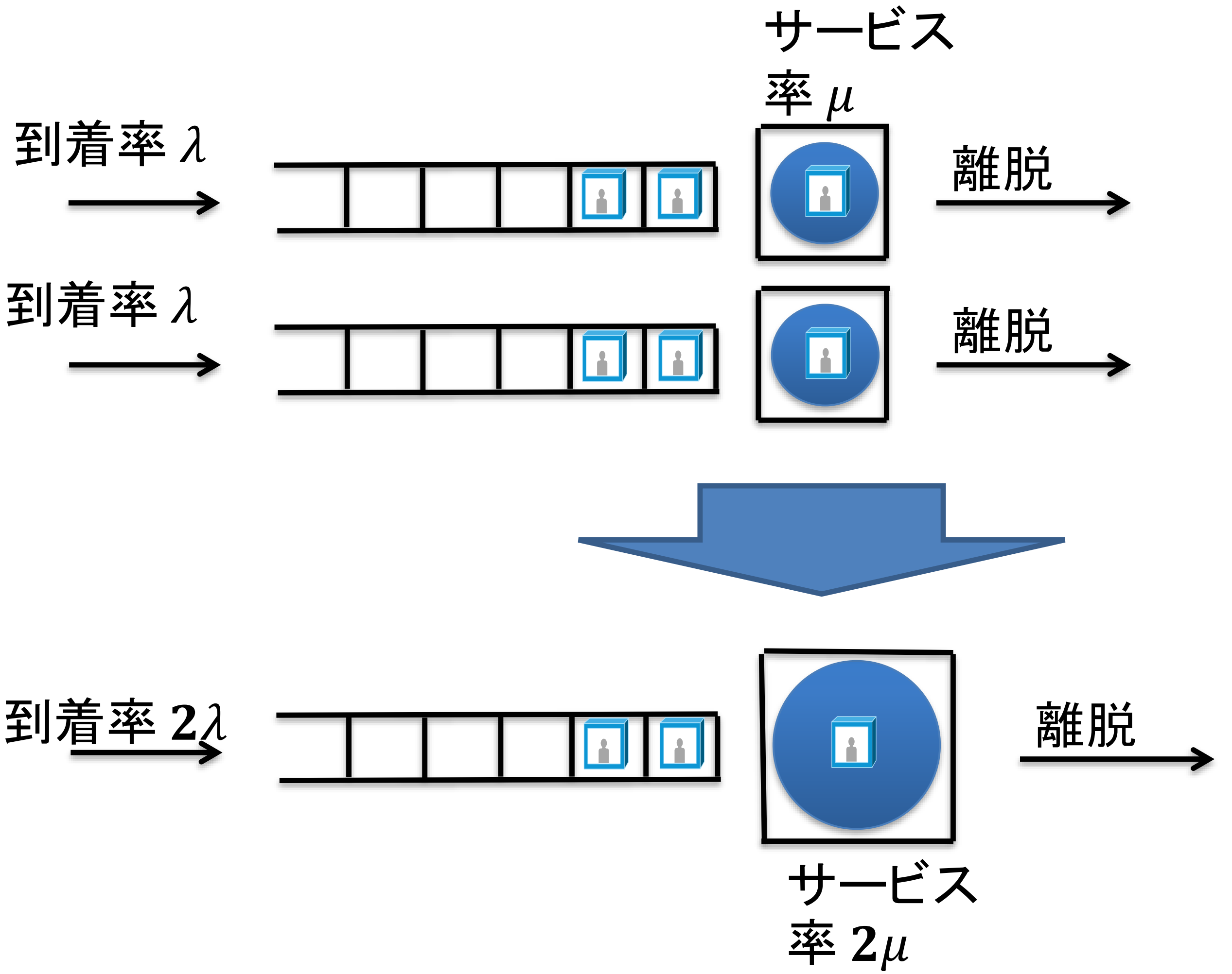
到着過程:M(Poisson),平均到着間隔$1/\lambda$
サービス時間分布:M(平均$1/\mu$の指数分布)
サーバ数:1(単一サーバ)

M/M/1モデルの結果

- 安定条件：並ぶ客数が無限に発散しないための条件
  - $\lambda < \mu$
    - 単位時間当たりの平均到着数 ＜ 単位時間当たりの平均サービス数
  - $\rho = \lambda/\mu < 1.$
- 系内客数(N)の分布
  - $P(N = n) = (1 - \rho)\rho^n, n = 0,1,2 \ldots$ ⇒幾何分布
- 平均応答時間
  - $E[T] = \frac{1}{1-\rho}\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu-\lambda}$=> $\mu = 5, \lambda = 4 \Rightarrow E[T] = 1$

規模の経済: $\lambda \to a\lambda, \mu \to a\mu \Rightarrow E\left[T^{(a)}\right] = \frac{E[T]}{a}$
応答時間がa倍早くなる！！！

規模の経済



平均応答時間: $\frac{1}{\mu - \lambda}$

平均応答時間: $\frac{1}{2}\frac{1}{\mu - \lambda}$

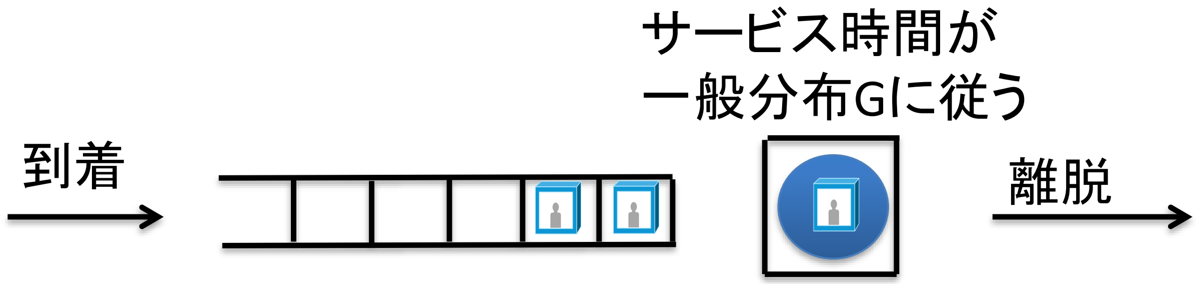
サービス時間分布の影響

サービス時間の変動の影響

M/G/1モデル

到着：M（Poisson過程）
サービス時間：G（任意分布）
サーバ数：単一サーバ

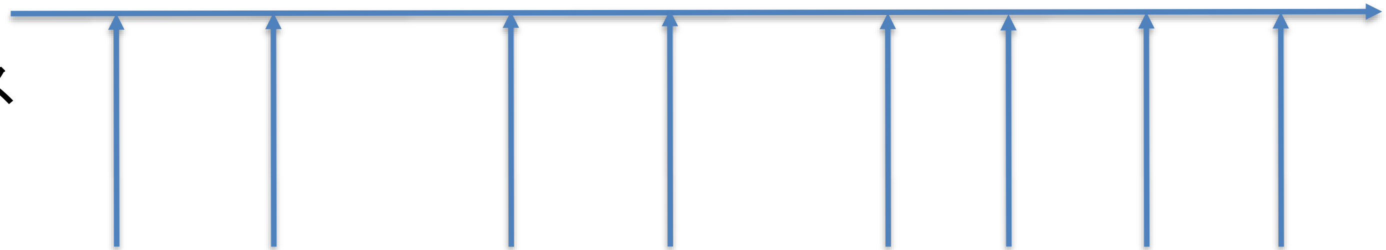
単一サーバモデル(M/G/1)



到着:M(Poisson過程)
サービス時間:G(任意分布)
サーバ数:単一サーバ

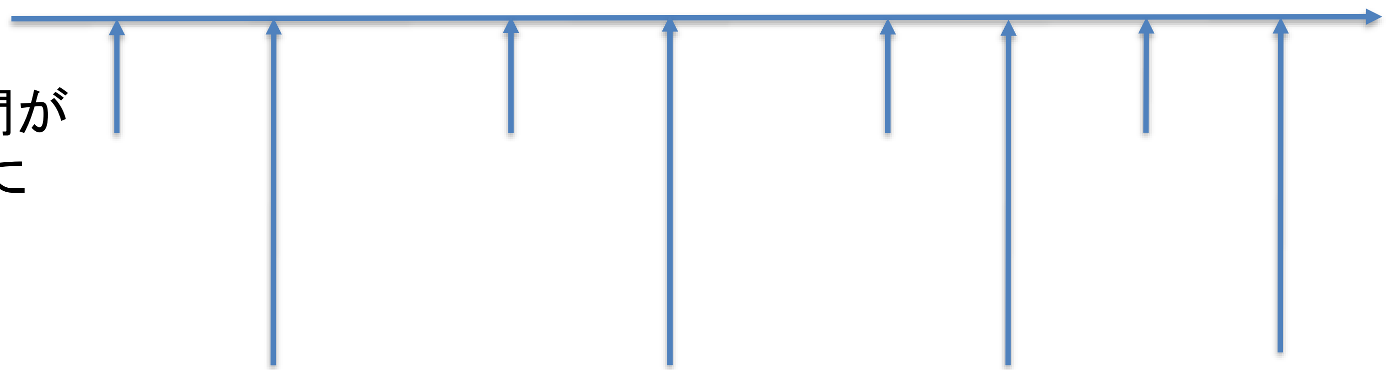
サービス時間分布の影響

全員サービス
時間が2!!
=> 平均 = 2.



サービス時間: 全員が2

サービス時間が
1と3が交互に
=> 平均 = 2



サービス時間: 1 & 3 が交互に

M/G/1モデル

- 到着過程:Poisson過程 λ
- サービス時間Sが一般分布に
- 平均待ち時間: **Pollaczek-Khintchine公式**
  - $E[W] = \frac{\lambda \mathrm{E}\left[S^2\right]}{2(1-\lambda \mathrm{E}[S])} = \frac{\lambda(\mathrm{Var}(S)+\mathrm{E}[S]^2)}{2(1-\lambda \mathrm{E}[S])}$
  - 分散$\mathrm{Var}(S) \geq 0.$
  - 同じ平均ならば分散がゼロの一定サービス時間が一番平均待ち時間が最小
  - 空港での入国審査:国内客の列と外国人客の列

まとめ

- 日常に現れる待ち現象
  - 空港、バス停、交通道路等
- 待ち行列モデル
  - Poisson分布
  - M/M/1モデルM/G/1モデル
- 他のトピック
  - つなぐ待ち行列⇒待ち行列ネットワーク
  - 戦略的に行動する⇒待ち行列ゲーム
  - 等など