◎ COMA ゼミメモ：12 月 18 日 (2000) (中村)
「凸幾何とアンチマトロイド：Paths, Circuits and Packing」

# 1 これまで自分で考えたこと

(1) Single-element extension (MN [21])

- poset shelling $\Longleftrightarrow$ 1-lifting
- edge-shelling of a tree $\Longleftrightarrow$ 2-lifting

(2) Excluded-minor characterizations

- Node-shelling antimatroids of graphs and digraphs (MN [23])
- Line-shelling of directed graphs (Okamoto+MN [25])

(3) Algorithmical characterizations

- greedoid (Goecke, Korte and Lovász [16]), antimatroid (Boyd and Faigle [6])
- nonsimple greedoid and antimatroids (MN [22])

(4) Packing of paths and circuits of antimatroids
(under investigation)

# 2 束

**Def. 2.1** lattce もしくは join-semilattice で元 $x$ が join-irreducible であるとは、$x = y \vee z$ であれば $x = y$ もしくは $x = z$ が成立すること。( ただし束の場合は、最小元は join-irreducible と呼ばないことにする。) その双対の概念を meet-irreducible と呼ぶ。束の元が join-irreducible かつ meet-irreducible のとき、 doubly irreducible であると言う。

**Def. 2.2** *Boolean algebra,* 分配束 *distributive lattice, modular lattice, semimodular lattice*

**Def. 2.3** *geometric lattice = atomic semimodular lattice.*

**Def. 2.4** join-distributive lattice (or locally free lattice) とは任意の元 $x$ で、$x$ をカバーする元を $x_1, \ldots, x_k$ として $x^+ = x_1 \vee \cdots \vee x_k$ とおくと、区間 $[x, x^+]$ が常に Boole 代数になることである。その双対の概念は meet-distributive lattice と呼ばれる。join-distributive かつ meet-distributive な束を doubly distributive と呼ぶことにする。( Edelman [8] が meet-distributive lattice の概念を導入してそれと anti-exchange property が同値になることを最初に示した。 )

join-distributive lattice は semimodular lattice で、かつその中の部分束が modular であれば実は必ず分配束になっている。逆に、この性質が特徴づけになる。

# 3 Convex Geometries and Antimatroids

$E$ が有限集合で、$\mathbb{K} \subseteq 2^E$ が以下をみたすとき、これを閉集合族という。

(1) $E \in \mathbb{K}$,

(2) $X, Y \in \mathbb{K} \implies X \cap Y \in \mathbb{K}$.

これから閉包作用素 $\sigma$ が以下で定義できる。

$$\sigma(A) = \bigcap_{X \in \mathbb{K}, A \subseteq X} X$$

「$A$ が閉集合 $\Leftrightarrow \sigma(A) = A$」は自明。

例 **3.1** $E \subseteq \mathbb{R}^n$：ベクトルの有限集合。$A \subseteq E$ に対して

$$\sigma(A) \ = \ < A > \ \cap \ E$$

ここで $< A >$ は、$A$ で張られる部分空間とする。これは、次の Steinitz exchange property をみたす。

$$x \neq y, \ x \notin \sigma(A), \ x \in \sigma(A \cup y) \implies y \in \sigma(A \cup x)$$

例 **3.2** $E \subseteq \mathbb{R}^n$：$n$ 次元アフィン空間中の点の集合。アフィン空間中の凸包を $conv.hull$ で表わすとして

$$\tau(A) = \text{conv.hull}(A) \cap E$$

で閉包作用素 $\tau$ が定義できるが、これは次の anti-exchange property をみたす。

$$x \neq y, \ x \notin \tau(A), \ x \in \tau(A \cup y) \implies y \notin \tau(A \cup x)$$

**Def. 3.1** anti-exchange property が成立する閉集合族を凸幾何 (convex geometry) と言う。凸幾何の元になる集合を凸集合と呼ぶ。

これと次の公理系は同値になる。

$<$ 凸幾何の公理系 $>$

(1) $E \in \mathbb{K}$,

(2) $X \in \mathbb{K}, X \neq E \implies \exists e \in E \setminus X : X \cup e \in \mathbb{K}$,

(3) $X, Y \in \mathbb{K} \implies X \cap Y \in \mathbb{K}$.

凸幾何の凸集合の補集合の全体のなす族を、アンチマトロイドと呼ぶ。

$<$ アンチマトロイドの公理系 $>$

(1) $\emptyset \in \mathbb{F}$,

(2) $X \in \mathbb{F}, X \neq \emptyset \implies \exists e \in X : X \setminus e \in \mathbb{F}$,

(3) $X, Y \in \mathbb{F} \implies X \cup Y \in \mathbb{F}$.

アンチマトロイドの元を **feasible set** と呼ぶ。

**Def. 3.2** 凸集合 $X \in \mathbb{K}$ に対して $Ex(X) = \{e \in X : e \notin \tau(X \setminus e)\}$ と書き、$Ex(X)$ の元を $X$ の端点という。このとき $X = \tau(Ex(X))$ が成立する。これは Klein-Milman の性質と呼ばれる。

feasible set $A$ に対してその successor の集合を $\Gamma(A) = \{e \in E \setminus A : A \cup e \in \mathbb{F}\}$ と書く。このとき、$\Gamma(A) = Ex(E \setminus A)$ が成立する。

参考： さまざまなアンチマトロイドの公理系の形について。

アンチマトロイドの公理系（弱い形）

(A0) $\emptyset \in \mathbb{F}$,

(A1) $X \in \mathbb{F},\ X \neq \emptyset \ \Rightarrow\ \exists x \in X\ :\ X \setminus x \in \mathbb{F}$,

(LF) $X \in \mathbb{F},\ x, y \in E,\ x \neq y$ のとき、$X \cup x \in \mathbb{F}, X \cup y \in \mathbb{F}$ ならば $X \cup \{x, y\} \in \mathbb{F}$. [locally free]

このとき、アンチマトロイドは集合の合併で閉じていて、下の (UC) を満たす。

(UC) $X, Y \in \mathbb{F} \ \Rightarrow\ X \cup Y \in \mathbb{F}$. [closed under union]

(Proof) $(LF) \Rightarrow (UC)$ の証明。任意の $X, Y \in \mathbb{F}$ をとる。(A1) から $\emptyset$ から $X$, $Y$ への初等鎖が存在する。それを $\{X_i\}_{i=0}^{k}$, $\{Y_j\}_{j=0}^{r}$ とすると、各固定した $i = 0, 1, 2, \ldots, k$ に対して $X_i \cup Y_j$ で $j = 0, \ldots, r$ の順に (LF) を適用すると $X_i \cup Y_r$ が feasible set になることが示せる。最終的に、$X \cup Y = X_k \cup Y_r \in \mathbb{F}$ と分かる。 □

(UC) と (A1) を使うと、アンチマトロイドでは (A1) よりさらに強く次の strong accesibility が成立することが示せる。

(A1') 任意の $X, Y \in \mathbb{F},\ X \subseteq Y$ で $X$ から $Y$ への初等鎖が存在する。 [strong accesibility]

(Proof) $\emptyset$ から $Y$ への初等鎖を $\{Y_j\}_{j=0}^{r}$ とする。(UC) が成立するので、$X \cup Y_j \in \mathbb{F}$ なので $\{X \cup Y_j\}_{j=0}^{r}$ の中に $X$ から $Y$ への初等鎖が含まれることはすぐ分かる。 □

この強い到達可能性 (A1') と (UC) から、次の強い増加律 (AG) が成立することが示せる。

(AG) $X, Y \in \mathbb{F},\ X \not\subseteq Y \ \Rightarrow\ \exists x \in X \setminus Y\ :\ Y \cup x \in \mathbb{F}$. [strong augmentation property]

(Proof) $X, Y \in \mathbb{F},\ X \not\subseteq Y$ とする。$X \cap Y$ の中の極大な $\mathbb{F}$ の元を $Z$ とする。すると、(A1') より $Z$ から $X$ への可能集合の初等鎖が存在する。特に、ある $x \in X \setminus Y$ が存在して $Z \cup x \in \mathbb{F}$. (UC) より $Y \cup (Z \cup x) = Y \cup x \in \mathbb{F}$. ゆえに (AG) が示された。 □

逆に (AG) を仮定すると、(LF), (UC), (A1') が成立することは即座に導ける。また、(A0) と (A1') から、(A1) が成立することは明らか。ゆえに (A0), (AG) を公理系として採用することができる。

アンチマトロイドの公理系（強い形）

(A0) $\emptyset \in \mathbb{F}$,

(AG) $X, Y \in \mathbb{F},\ X \not\subseteq Y \ \Rightarrow\ \exists x \in X \setminus Y\ :\ Y \cup x \in \mathbb{F}$.

アンチマトロイドの他の特徴づけ　Korte and Lovász が [18] で導入した alternative precedence structure (もしくは shelling structure) は、アンチマトロイドに同値な概念である。各元 $x \in E$ に対して $E$ の部分集合の族 $H(x)$ が与えられているとする。( $H(x)$ は clutter として一般性を失わない。) このとき

$$\begin{aligned}\mathbb{F} = \{A \subseteq E\ :\ & A \text{ の元を適当に並べた列 } a_1 \cdots a_k\ (k = |A|) \text{ があって、} \\ & \text{任意の } i = 1, \ldots, k \text{ で、ある } X_i \in H(a_i) \text{ が存在して} \\ & X_i \subseteq \{a_1, \ldots, a_{i-1}\} \text{ となる } \}\end{aligned}$$

を alternative precedence structure または shelling structure と呼ぶ。alternative precedence structure はアンチマトロイドと同値な概念である。

逆に、与えられたアンチマトロイド $\mathbb{F}$ を alternative precedence structure として表わすには、 $\mathbb{P}$ を $\mathbb{F}$ の根付きパス集合族とするとき、$H(x) = \{P \setminus x : (P, x) \in \mathbb{P}\}$ とすればよい。根付きパス集合の定義は後述する。

アンチマトロイドのさまざまな表現、特徴づけ。

**Proposition 3.1** $(E, \mathbb{F})$ が set system で $\mathbb{F} \subseteq 2^E$, $\emptyset, E \in \mathbb{F}$ とするとき、以下は同値である。

(1) $\mathbb{F}$ はアンチマトロイドである。

(2) $\mathbb{F}$ は alternative precedence structure

(3) $\mathbb{F}$ は 高さ $|E|$ の join-distibutive 束になる。

(4) $\mathbb{F}$ は 高さ $|E|$ の semimodular 束になる。

# 4 凸幾何とアンチマトロイドの例

I affine 空間。$\mathbb{R}^n$ 空間。

(1) affine 空間中の点配置。(affine convex shelling, Edelman 86 [10])

(2) $\mathbb{R}^n$ 中の下半凸シェリング。

II poset, semilattice, lattice

(1) poset shelling :

- 凸幾何：filter を凸集合とする凸幾何。(Edelman 80 [8])
- アンチマトロイド：極小元の除去の列の全体。つまり、ideal の全体のなす束。

(2) double shelling of poset

- 凸幾何：$\{X \subseteq P : a, b \in X, a \leq c \leq b \Rightarrow c \in X\}$ (Edelman 80 [8])
- アンチマトロイド：極小元または極大元の除去の列。

(3) 同一の集合上の半順序の間の半順序関係のなす束 (Edelman and Klinsberg [12], Edelman [9])

- 凸幾何：同じ台集合 $E$ 上の 2 つの関係 $P, Q \subseteq E \times E$ が半順序であるとき、その間の関係を

$$P \leq Q \;\Leftrightarrow\; P \subseteq Q \quad (\Leftrightarrow \text{ for } a, b \in E, \text{ if } a \leq_P b \text{ then } a \leq_Q b \ )$$

で定めるとこれは半順序関係になり、かつ meet-distributive lattice になる。特に与えられた半順序 $P$ に対して $N(P) = \{Q : Q \leq P\}$ とすると、これは meet-distibutive lattice になり、凸幾何を定める。

- アンチマトロイド：この凸幾何の補のアンチマトロイドは、実は推移的有向グラフの辺の除去から定義される transitivity antimatroid に等しい。

(4) k-family of poset : 2 つの anti-chain $A, B \subseteq P$ に対して、任意の $a \in A$ で、ある $b \in B$ が存在して $a \leq b$ のとき、$A \preceq B$ であるとして半順序を定義する。

- 凸幾何：その中の鎖の長さがすべて $k-1$ 以下である部分集合の全体を $A_k(P)$ と書くことにする。$A_k(P)$ の各元 $X$ は一意に canonical な anti-chain への分割 $(X_1, \ldots, X_k)$ を持つ。canonical とは $i \leq j$ のとき、各 $a \in X_i$ に対してある $b \in X_j$ が常に存在して $a \leq_P b$ となることである。2 つの k-family $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ にたいして、その canonical な分割がそれぞれ $(A_1, \ldots, A_k)$, $(B_1, \ldots, B_k)$ であって任意の $i = 1, \ldots, k$ で $A_i \preceq B_i$ のとき、$\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$ とていぎすると、これは $A_k(P)$ の上の半順序になる。この半順序に関して $A_k(P)$ は、同時に meet-distributive 束かつ join-distributive 束になる。
  特に $k = 1$ のときは、$A_1(P)$ は anti-chain の集合になる。(Greene and Kleitman [15], Edelman [10])
- アンチマトロイド： シェリングの言葉で言うと？

(5) semilattice の部分半束

- 凸幾何：join-semilattice (もしくは meet-semilattice) の部分半束の全体は、meet-distributive lattice になる。集合族として凸幾何になる。
- アンチマトロイド： join-irreducible 元の除去をシェリングとする。

(6) $B_3$-free な join-irreducible lattice のシェリング (MN [24] )

- アンチマトロイド：doubly irreducible な元を除去する。
- 凸幾何：

III グラフの中の凸集合

(1) 木の点シェリング (Boulaye 1967, 1968)

- 凸幾何：連結な点部分グラフの全体
- アンチマトロイド：端点の除去の列

(2) 木の辺シェリング

- 凸幾何：連結な部分グラフの全体
- アンチマトロイド：端辺の除去の列

(3) block graph: 極大な 2 − 連結成分がすべて完全グラフになるものを block graph と呼ぶ。

- 凸幾何：点部分グラフが連結になるような点集合を凸集合とする凸幾何。
- アンチマトロイド：block graph は自明に三角化グラフになり、その単体的シェリングの定めるアンチマトロイド。

実は、与えられた木に対して、その各辺に対して頂点を、辺が端点を共有するとき頂点間に枝を与えてできるグラフ ( つまりラングラフ ) は、block graph になる。 その block graph の単体的シェリングのアンチマトロイドと、もとの木の辺シェリングは一致する。ゆえに、木の辺シェリングのクラスは、block graph のシェリングのアンチマトロイドのクラスの部分クラスになっている。

(4) 有向グラフの convex set (Pfaltz [29])

- 凸幾何： 有向グラフ $D = (V, X)$ 中で、点の部分集合 $A \subseteq V$ が convex とは、$A$ 中の任意の 2 点 $x, y$ で $x$ から $y$ への有向パス上の点がすべて $A$ に含まれることとする。$D$ が acyclic のときは、その到達関係から定まる点集合上の半順序の double shelling antimatroid とこの

凸幾何は同じになる。$D$ が acyclic でないときは、その強連結成分の族のなす半順序集合を考えれば、同じことになる。

これは見かけ上は一般的だが、実際には半順序集合の doubly shelling antimatroid に等しい。

(5) Ptlemaic グラフ：任意の 4 点 $u, v, x, y$ に対して

$$d(u,v)d(x,y) \leq d(u,x)d(v,y) + d(u,y)d(v,x)$$

が成立するグラフのこと。

- 凸幾何：geodesically convex (g-convex) set の全体。点集合が g-convex とは、その中の任意の 2 点を結ぶ最短路が必ずその集合の中に含まれること。(Farber and Jamison [14])
- アンチマトロイド： シェリングの言葉で言うと？

(6) 三角化グラフの単体的シェリング

- アンチマトロイド：単体的点のシェリング
- 凸幾何：monophonically convex (m-convex) set の全体。点部分集合 $A$ が m-convex 集合とは、その中の任意の 2 点を結ぶ **chordless** パス上の点がすべて再び $A$ に属すること。(Farber and Jamison [14])

(7) 根付き三角化グラフの単体的シェリング. $G = (E \cup r, A)$ を根 $r$ をもつ連結な三角化グラフとして、最後に $r$ を残す単体的シェリング列のなすアンチマトロイドのこと。

このクラスは、普通の連結な三角化グラフの単体的シェリングアンチマトロイドのなすクラスを proper な部分クラスとして含む。

(8) Totally balanced hypergraphs and nest vertex shelling: $H = (E, \mathcal{E})$ が totally balanced ハイパーグラフであるとき。([14])

- $X \subseteq E$ の中の任意の 2 点を端点とする simple path 上の点が常に $X$ に含まれるとき凸集合とすると、これから凸幾何が定義される。
- この hypergraph の nest vertex を順に除去するシェリング列は、アンチマトロイドを定める。

(9) 強三角化グラフ strongly chordal graph : $v$ が simple な点であるとは、$v$ が単体的でかつその近傍中の点の近傍の族 $\{N(x) : x \in N(v)\}$ が鎖になることである。

- 凸幾何：srongly convex (s-convex) な点集合を凸集合として定まる凸幾何。
- アンチマトロイド：simple な点の除去の列。

(10) transitivity antimatoroid : transitively oriented な有向グラフで、その辺集合を台集合として考える。

- 凸幾何：推移律をみたす辺の集合を凸集合とする。
- アンチマトロイド:transitively oriented なグラフで、その辺を除去しても transitively oriented の性質がこわれないような辺を選んで、順に除去する。

(11) separating sets in a digraph

$G = (V, A)$ を有向グラフ、$T \subseteq V$ を terminal 点集合として点集合 $X$ が点集合 $Y$ を $T$ から separate するとき、$X \prec Y$ と書くことにすると、一般に antisymmetric にはならず、これは擬順序になる。例えば、$T \subseteq X$ のときは $X \prec T$, $T \prec X$ の両方が成立する。ただし、$X \subseteq Y \Rightarrow X \prec Y$ は常に成立する。ここで

$$[X] = \{x \in X : x \text{ から出て途中 } x \text{ 以外に } X \text{ の点を含まないパスで } T \text{ へ至るものがある }\}$$

すると 集合族 $\{X \subseteq V : X = [X]\}$ の上で $\prec$ は半順序になる (Pym and Perfect [27])。さらにこれは meet-distributive lattice になる (Polat [26], Edelman [10])

補足：**Totally balanced hypergraph と nest vertex**　hypergraph 中で $x_1E_1x_2\cdots x_{n-1}E_{n-1}x_n$ がパスであるとは、$x_i, x_{i+1} \in E_i$ かつ $x_i$ が pairwise distinct になりかつ $E_i$ が pairwise distinct になることである。特に $E_i \cap \{x_1, \ldots, x_n\} = \{x_i, x_{i+1}\}$ であるときこのパスを simple と呼ぶ。

長さが 3 以上の simple なパスを含まないとき、そのハイパーグラフは totally balanced であるという。これはその partial subhypergraph が常に forest になっていることに同じである。

ハイパーグラフの頂点 $x$ が nest vertex とは、$H_x = \{E : x \in E\}$ が nested family になることである。

ここでハイパーグラフの点集合 $K \subseteq$ について、その中の 2 頂点を結ぶ simple パス上の点がすべて $K$ に含まれているとき、これを凸集合と呼ぶことにすると、totally balanced hypergraph ではこれが常に凸幾何になっている。かつ nest vertex のシェリングはアンチマトロイドをなし、これらは互いに補になっている。

**strongly chordal graph と simple vertex**　strongly chordal graph とは、三角化グラフであってかつ長さ 6 以上の偶数長閉路が常に odd chord をもつもののこと。

グラフの点が simple であるとはその近傍中の任意の 2 点 $x, y \in N(v)$ に対して常に $N[x] \subseteq N[y]$ または $N[y] \subseteq N[x]$ が成立していることである。このとき、

$$\begin{aligned} G = (V, E) \text{ が強三角化グラフである} &\iff G \text{ の点部分グラフが常に simple な点を持つ} \\ &\iff \text{neighbourhood hypergraph } N(G) = (V, \{N(v : v \in V)\}) \\ &\quad \text{が totally balanced である} \end{aligned}$$

点集合 $K \subseteq V$ が strongly convex (s-convex) とは、$K$ の 2 点を結ぶ even-chorded path 上のすべての点が $K$ に含まれることである。ここでパス $P = u_0u_1 \ldots n_n$ が even-chorded path とは、odd chord を持たずかつ $u_0,\ u_n$ が $P$ の chord の端点にならないことである。

グラフが strongly chordal であるとき、その strongly convex sets の全体は凸幾何をなす。かつそれは simple な頂点のシェリングの定めるアンチマトロイドに同じである。

IV 探索

(1) 根付き有向グラフの点探索 (辺探索)

- アンチマトロイド：$A \subseteq V$ の各点への $r$ からの有向パスが $A \cup r$ に存在するような点集合 $A$ の全体。
- 凸幾何 :?

(2) 根付きグラフの点探索 (辺探索)

- アンチマトロイド：$A \cup r$ の誘導部分グラフが連結になるようなもの全体。
- 凸幾何 :?

V acyclic 有向マトロイド $\mathcal{M} = (E, \mathbb{C})$

- 凸幾何：つぎの閉包関数は凸幾何を定義する (Edelman 1982)

$$\sigma(A) = A \cup \{x \in E \setminus A : \exists X \in \mathbb{C}\ s.t.\ X^+ \subseteq A, X^- = \{x\}\} \tag{4.1}$$

  (1) 特に acyclic 有向グラフから定まる acyclic 有向マトロイドの場合で、有向グラフが推移律をみたすときは、ここで定義されるアンチマトロイドは、その有向グラフの transitivity antimatroid に一致する。それゆえ、transitivity antimatroid のクラスは、acyclic グラフから定まる有向マトロイドの定めるアンチマトロイドのクラスの部分クラスである。

  (2) さらに一般に、 realizable な acyclic 有向マトロイドのとき、それをアフィン空間中の点配置として実現したとき、上の閉包の定める凸幾何は、そのアフィン点配置の凸幾何に一致する。またその逆も成立する。つまり、affine 凸幾何の全体のなすクラスと realizable な acyclic oriented matroid から定まる凸幾何の全体のなすクラスとは一致する。

- アンチマトロイド： シェリングの言葉で言うと？

参考：有向マトロイド **(oriented matroid)**　$X = (X^+, X^-)$ が $E$ の signed set とは、$X^+, X^- \subseteq E,\ X^+ \cap X^- = \emptyset$ となるペアのことである。このとき $-X = (X^-, X^+)$ と定義する。$\mathcal{C}$ が signed set の集まりで以下をみたすとき、有向マトロイドのサーキット族になる。

(1) $(\emptyset, \emptyset) \notin \mathcal{C}$,

(2) If $X \in \mathcal{C}$, then $-X \in \mathcal{C}$.

(3) No proper subset of a circuit is not a circuit.

(4) If $X, Y \in \mathcal{C},\ X \neq -Y$ and $e \in X^+ \cup Y^-$, then there exists $Z \in \mathcal{C}$ such that $Z^+ \subseteq (X^+ \cup Y^+) \setminus e$ and $Z^- \subseteq (X^- \cup Y^-) \setminus e$.

有向マトロイドが acyclic とは、 $X^- = \emptyset$ となるサーキットを含まないこと。totally cyclic とは、任意の元 $x$ に対して $e \in X^+,\ X^- = \emptyset$ となるサーキットが存在すること。

# 5 Paths and Circuits of Antimatroids

**パス (path)**

**Def. 5.1** feasible set $A$ に対して unique に元 $e \in A$ が存在して $A \setminus e \in \mathbb{F}$ であるとき、$A$ をパス (path), $(A, e)$ を根付きパスと呼ぶ。

**Proposition 5.1** $(A, e)$ が根付きパスであることと $A$ が $\mathbb{F}^e = \{X : X \in \mathbb{F}, e \in X\}$ の極小元になっていることは、同値になる。

(Proof) ほとんど自明。 □

$\mathbb{P} = \{(P_i, e_i) : i \in I\}$ を根付き集合の族として、$E = \cup_{i \in I} P_i$ とおく。$\mathbb{P}$ がアンチマトロイドの根付きパスの族になるための必要十分条件は

$<$ パスによる公理系 $>$
$(P, e) \in \mathbb{P}$, $f \in \mathbb{P} \setminus e$ ならば

(1) ある $(P', f) \in \mathbb{P}$ があって $P' \subseteq P \setminus e$.

(2) $e \in P' \subseteq P$ となる $(P', f) \in \mathbb{P}$ は存在しない。

**Proposition 5.2** 上の (1), (2) が $\mathbb{P}$ がアンチマトロイドの根付きパス族になるための必要十分条件になる。

(必要性) 必要性は自明。
(十分性) $\mathbb{F} = \{\cup_{j\in J} P_j : J \subseteq I\}$ とおくと、これが accessibility と合併で閉じていることは定義から明らかでアンチマトロイドになる。このアンチマトロイドのパス集合族と $\mathbb{P}$ が一致することを示そう。

□

独立 **(or free)** 集合

**Def. 5.2** $I(\mathbb{F}) = \{\Gamma(A) : A \in \mathbb{F}\}(= \{Ex(K) : K \in \mathbb{K} = \mathbb{F}^*\})$ に属する集合を独立集合と呼ぶ。独立でない集合を従属集合と呼ぶことにする。

**Lemma 5.1** 独立集合の部分集合はふたたび独立集合になる。

(Proof) 独立集合 $A = \Gamma(X)$ $(X \in \mathbb{F})$ に対して $A' \subseteq A$ とする。$Y \in \mathbb{F},\ X \subseteq Y,\ A' \subseteq \Gamma(Y)$ をみたすものの中で極大な $Y$ をとる。すると $A' = \Gamma(Y)$ になる。そうでないとすると、ある元 $b \in \Gamma(Y) \setminus A'$ が存在するが、このとき $Y \cup b \in \mathbb{F}$ かつ $b \notin A'$ だから $A' \subseteq \Gamma(Y \cup b)$ となって $Y$ の取り方に矛盾する。 □

**Lemma 5.2** $A \subseteq E$ に対して以下は同値になる。

(1) $A$ は独立集合である。

(2) 任意の $a \in A$ に対して、ある可能集合 $X \in \mathbb{F}$ があって $A \cap X = \{a\}$ となる。

(3) $\mathbb{F} : A = \{A \cap X : X \in \mathbb{F}\} = 2^A$.

(Proof)

- (1) $\Longrightarrow$ (2). 独立集合が (2) をみたすのは定義から明らか。
- (2) $\Longrightarrow$ (1). $A = \{a_1 \dots, a_k\}$ が (2) をみたすとする。定義から各 $i = 1, \dots, k$ である $X_i \in \mathbb{F}$ があって $A \cap X_i = \{a_i\}$ となる。特に $X_i$ はそのようなものの中から極小なものを取っておく。すると $Y_i = X_i \setminus a_i \in \mathbb{F}$ が成立する。そうでないとすると、$b \in \Gamma(X_i),\ b \neq a_i$ となる元 $b$ があるが、$X \setminus b \in \mathbb{F}$ $(X_i \setminus b) \cap A = \{a_i\}$ となって $X_i$ の極小性に反する。

  $Y = \cup_{i=1}^k Y_i$ とおく。すると $Y \in \mathbb{F}$ かつ $Y \cap A = \emptyset$ となる。$a_i \in \Gamma(Y_i)$ だから locally free 性から $a_i \in \cup\Gamma(Y)$. ここで $Y \cap Y = \emptyset$ より $a_i \in \Gamma(Y)$ である。ゆえに $A \subseteq \Gamma(Y)$ と分かった。補題 5.1 より $A$ も独立と分かる。
- (2) $\Longleftrightarrow$ (3) は明らか。 □

サーキット

**Def. 5.3** 集合 $A$ の部分集合で feasible set になるもので最大のものが一意に存在する。それを $A$ の基と呼ぶ。( 極大独立集合とは異なるので注意。)

**Def. 5.4** 極小な従属集合をサーキットと呼ぶ。

**Proposition 5.3** $C$ をサーキットとする。 $E \setminus C$ の中の基を $B$ とすると、$e \in C$ が unique に存在して $\Gamma(B) = C \setminus e$

(Proof) 定義から $C \nsubseteq \Gamma(B)$ である元 $e \in C \setminus \Gamma(B)$ が存在する。すると $B$ は $(E \setminus C) \cup \{e\}$ の中でも再び最大 feasible 集合になる。サーキットの極小性から $C \setminus e$ は独立集合になる。ゆえに $\Gamma(B) = C \setminus e$ と分かる。□

**Def. 5.5** この Proposition 5.3 で定まる元 $e \in C$ をこのサーキットの根と呼び、$(C, e)$ を根付きサーキットと呼ぶ。

根付き集合族 $\mathbb{C} = \{(C_i, e_i) : i \in I\}$ がアンチマトロイドのサーキット族になるための必要十分条件は以下である。

$<$ 根付きサーキットによる公理系 $>$

(1) $(C_1, e), (C_2, e) \in \mathbb{C},\ C_1 \subseteq C_2$ ならば $C_1 = C_2$,

(2) $(C_1, e_1), (C_2, e_2) \in \mathbb{C}$ かつ $e_1 \in C_2 \setminus e_2$ ならば、ある $(C_3, e_3) \in \mathbb{C}$ があって $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus e_1$.

**Proposition 5.4** $e \in E,\ X \subseteq E$ かつ $e \notin X$ とする。ここで $C = X \cup e$ とおく。このとき以下の条件は同値になる。

(1) $(C, e)$ は根付きサーキットになる。つまり $C$ は極小な従属集合で、かつ $E \setminus C$ の基 $B$ に対して $\{e\} = C \setminus \Gamma(B)$ となっている。

(2) $F : C = 2^C - \{e\}$ かつこの性質に関して $C$ は極小である。

(3) 任意の $a \in X$ に対して、ある $A \in \mathbb{F}$ があって、$(X \cup e) \cap A = \{a\}$ となる。かつ、 $(X \cup e) \cap A' = \{e\}$ となる $A' \in \mathbb{F}$ は存在しない。

(4) $X$ は $e \in \tau(X),\ e \notin X$ となる極小な独立集合である。

(5) $e \in \tau(X),\ e \notin X$ で $X$ はこの性質に関して極小な集合である。

(6) 任意の $Y \in \mathbb{F}^e = \{A : A \in \mathbb{F}, e \in A\}$ に対して $|X \cap Y| \geq 1$ となりかつこの性質に関して $X$ は極小になる。

(Proof)

- (1) $\Rightarrow$ (2). $E \setminus C$ の基を $B$ とすれば $\Gamma(B) = C \setminus e$ なので $\mathbb{F} : C = 2^C \setminus \{e\}$ は明らか。 $C$ は極小な従属集合なので $C$ の proper な部分集合 $C' \subsetneq C$ は独立集合になり、それゆえ $\mathbb{F} : C' = 2^{C'}$ になり、(1) での極小性をみたす。

- (2) ⇒ (3). $e \notin \tau(X)$ とすると $Y = E \setminus \tau(X) \in \mathbb{F}$ となり、かつ $e \in Y,\ Y \cap (X \cup e) = \{e\}$ となって仮定に矛盾する。

- (3) ⇒ (1). $X$ が独立集合で、 $X \cup e$ は従属集合になりかつ $X$ がこの性質に関して極小になっているから、 $X \cup e$ はサーキットになる。 さらに $E \setminus (X \cup e)$ の中の基を $B$ とすると、$(X \cup e) \setminus \Gamma(B) = \{e\}$ も明らか。

- (3) ⇒ (4). $e \notin \tau(X)$ とする。すると $Y = E \setminus \tau(X) \in \mathbb{F}$ かつ $e \in Y, Y \cap (X \cup e) = \{e\}$ となって (3) の仮定に矛盾する。

- (4) ⇒ (5). ほとんど自明。$X$ を (4) をみたす独立集合とする。$X' \subsetneq X$ があって $e \in \tau(X')$ とすると、$X'$ がふたたび独立集合になるから矛盾する。

- (5) ⇒ (3). まず、任意の $a \in X$ で、ある $A \in \mathbb{F}$ があって $X \cap A = \{a\}$ となることを示す。まず $e \notin \tau(X - a)$ である。(そうでないとすると、$X$ の極小性に反する。) $X' = X - a$ と置く。ここで $a \in \tau(X')$ とすると、$X = X' \cup a \subseteq \tau(X')$ より $\tau(X) = \tau(X')$ となり、 $e \in \tau(X')$ となって $X$ の極小性に反する。ゆえに、 $a \notin \tau(X')$.

  $e \in \tau(X) = \tau(X' \cup a), e, a \notin \tau(X')$ だから、反交換公理より $a \notin \tau(X' \cup e)$. ここで $A = E \setminus \tau(X' \cup e)$ とおくと、$A \in \mathbb{F}$ かつ $X \cup A = \{a\}$ とわかる。

  次に、$(X \cup e) \cap A' = \{e\}$ となる $A' \in \mathbb{F}$ が存在しないことを示す。もしそのような feasible set $A'$ が存在するとする。 $E \setminus A'$ は凸集合なので $\tau(X) \subseteq E \setminus A'$ となって、これは $e \in \tau(X)$ の仮定に矛盾する。 ($e \in A'$ で $e \notin E \setminus A'$ だから。) これで (5) ⇒ (3) が示せた。

- (5) ⇔ (6). $e \notin X$ のとき

  $$e \in \tau(X) \iff Y \in \mathbb{F} \text{ かつ } e \in Y \text{ ならば常に } |X \cap Y| \geq 1$$

  を示せばよい。

  (5) ⇒ (6). $e \in \tau(X)$ とする。ある $Y \in \mathbb{F}$ で、$e \in Y,\ X \cap Y = \emptyset$ とすると $X \subseteq E \setminus Y \in \mathbb{F}^*$ だから $\tau(X) \subseteq E \setminus Y$ である。これから $e \in \tau(X)$ で、これは $e \notin E \setminus Y$ に矛盾する。
  (6) ⇒ (5). $e \notin \tau(X)$ とする。 すると $Y = E \setminus \tau(X) \in \mathbb{K}$ だから $\tau(X) \subseteq E \setminus Y$ で、これから $e \in \tau(X)$ で、これは $e \notin E \setminus Y$ と矛盾する。

□

**Def. 5.6** $x \in E$ のとき、

$$\mathbb{P}_x = \{A \setminus x : (A, x) \text{ is a rooted path}\} \tag{5.1}$$

$$\mathbb{C}_x = \{C \setminus x : (C, x) \text{ is a rooted circuit}\} \tag{5.2}$$

**Theorem 5.1** 各 $x \in E$ で、$\mathbb{P}_x$ と $\mathbb{C}_x$ は互いに blocker になる。

(Proof) Proposition 5.1 より $\mathbb{F}^x$ の極小元の全体のなす clutter は $\mathbb{P}_x$ に一致するので、Proposition 5.4 (6) より直ちに $\mathbb{C}_x$ は $\mathbb{P}_x$ の blocker になると分かる。 □

逆に、サーキットから feasible sets を特徴づけることができる。

**Proposition 5.5** アンチマトロイド $\mathbb{F}$ に対して以下が成立する。

(1) $A \subseteq E$ にたいして、 $A$ が feasible set であるための必要十分条件は、任意のサーキット $C$ にたいして $C \cap A$ が $C$ の根にならないことである。

(2) $E$ 上の単純な語 $\alpha$ が $L(\mathbb{F})$ に属するための必要十分条件は、任意のサーキット $C$ に対して $C$ の元で $\alpha$ に最初にあらわれる元がその根でないことである。

任意の根付き集合族 $D = \{(A_i, a_i) : i \in I\}$ に対して、

$$L = \{x_1 \cdots x_k \in E_s^* : \text{for any } i \in I, \text{ if } x_j = a_i \ (1 \leq j \leq k), \text{ then } \{x_1, \ldots, x_{j-1}\} \cap D_i \neq \emptyset \ \}$$

とすると、これは常にアンチマトロイド言語になる。特に、この根付き集合族としてあるアンチマトロイドの根付きサーキット族をとれば、もとのアンチマトロイドを定義する。

一般に、この方法で同じアンチマトロイドを定める根付き集合族は一意には定まらないが、それらの中で最小のものが存在することが知られている。

**Def. 5.7** $(C, a)$ が critical circuit とは、 $E \setminus C$ の基 $B$ に対して、$A \cup a \notin \mathbb{F}$ かつ任意の $b \in C \setminus a$ に対して $A \cup \{a, b\} \in \mathbb{F}$ となることである。

**Proposition 5.6** 以下が成立する。

(1) critical circuit の定めるアンチマトロイドは、もとのアンチマトロイドに一致する。

(2) アンチマトロイド $\mathbb{F}$ が根付き集合族 $D$ から定まるとき、$D$ は critical circuits を必ず含む。

# 6 Blocker と Packing

**Def. 6.1** set system $(E, \mathbb{A})$ が clutter とは、一方が他方を真部分集合として含むような元の組を含まない集合族のこと。

**Def. 6.2** clutter $\mathbb{A}$ に対して集合族 $\{Y \subseteq E : \ |X \cap Y| \geq 1 \text{ for any } X \in \mathbb{A}\}$ の極小な元のなす clutter を $\mathbb{A}$ のブロッカー blocker と呼び $b(\mathbb{A})$ と書く。

このとき常に $b(b(\mathbb{A})) = \mathbb{A}$ が成立する。また、特に $\mathbb{A} = \{\emptyset\}$ と $\mathbb{B} = \emptyset$ は互いにブロッカーになる。

常に次の向きの不等式が成立する。

$$\mathbb{A} \text{ の互いに素な元の組のサイズの最大値} \leq \min\{|Y| : Y \in b(\mathbb{A})\} \tag{6.1}$$

**Def. 6.3** 6.1 式で等号が成立するとき、$\mathbb{A}$ はパック pack すると言う。

**例 6.1** Menger の定理。$G = (V \cup \{s, t\}, E)$ を graph or digraph とする。かつ $(s, t) \notin E$ とする。このとき

$$\mathbb{A} = \{\{v_1, \ldots, v_k\} | (s, v_1, \ldots, v_k, t) \text{ is an s,t-path without short-cut}\}$$

はパックする。このとき $b(\mathbb{A})$ の元は極小な s,t–separator になっている。

**例 6.2** pack しない clutter の例 ([28])

(1) $Q_6 = \{\{1,3,5\},\{1,4,6\},\{2,3,6\},\{2,4,5\}\}$
( $b(Q_6) = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\{1,3,5\},\{2,3,6\},\{1,4,6\},\{2,4,5\}\}$ はパックする。)

(2) $C_s = \{\{1,2\},\{2,3\},\ldots,\{s-1,s\},\{s,1\}\}$ ($s \geq 3$, 奇数) とその blocker $b(C_s)$

(3) $F_s = \{1,2,\ldots,s\} \cup \{\{0,s\} : i = 1,\ldots,s\}$ ($s \geq 2$)
( $b(F_s)$ は pack する)

(4) $C_9 \cup \{\{3,6,9\}\}$ とその blocker $b(C_9 \cup \{\{3,6,9\}\})$

(5) $E = \{1,2,\ldots,n\}$ ($n \geq 3$) として
$D_n = \{E \setminus \{i\} : i = 1,\ldots,n\}$ とその blocker $b(D_n) = \{\{i,j\} : 1 \leq i < j \leq n\}$

# 7 clutter の deletion, contraction, アンチマトロイドのマイナー、trace, reduction

- $\mathbb{L} \subseteq 2^E$ が clutter のとき。$A \subseteq E$ に対して

$$\mathbb{L}/A = \text{Minimal}(\{X \setminus A : X \in \mathbb{L}\}), \qquad \mathbb{L} \setminus A = \{X \in \mathbb{L} : X \cap A = \emptyset\}$$

で clutter の contraction と deletion を定義する。ここで Minimal( ) はその集合族の極小元の全体のなす clutter を表わす。

- アンチマトロイドのマイナー：アンチマトロイド $(E,\mathbb{F})$ と feasible sets $A, B \in \mathbb{F}$ に対して

$$\mathbb{F}/A = \{X - A : X \in \mathbb{F},\ A \subseteq X\}, \qquad \mathbb{F}|B = \mathbb{F} \setminus (E \setminus B) = \{X \in \mathbb{F} : X \subseteq B\}$$

を $\mathbb{F}$ の contraction 及び restriction (or deletion) と呼ぶ。さらに $A \subseteq B$ であるとき $(\mathbb{F}|B)/A$ を $\mathbb{F}$ のマイナーという。マイナーは $B - A$ 上のアンチマトロイドになる。これはもとの束 $\mathbb{F}$ の中の区間 $[A,B]$ に同型である。

また $\mathbb{F}^*$ を $\mathbb{F}$ の補のなす凸幾何として、 $A^* = E \setminus A$ とすると

$$(\mathbb{F}/A)^* = \mathbb{F}^*|A^*, \qquad (\mathbb{F}|A)^* = \mathbb{F}^*/A^*$$

- trace, reduction: $P \subseteq E$ に対して、以下をアンチマトロイドの reduction, trace と呼ぶことにする。どちらもアンチマトロイドになる。

$$\mathbb{F} \downarrow P = \{X \setminus P : X \in \mathbb{F}\}, \qquad \mathbb{F} : P = \{X \cap P : X \in \mathbb{F}\}$$

定義から自明に

$$\mathbb{F} : P = \mathbb{F} \downarrow (E \setminus P)$$

である。$A \in \mathbb{F}$ ならば contraction $\mathbb{F}/A$ と reduction $\mathbb{F} \downarrow \mathbb{A}$ は一致するが、$\mathbb{F}/A$ と $\mathbb{F} \downarrow A$ は一般には異なる。

アンチマトロイドのパス、サーキットと整合的な操作は reduction, trace である。実際、次が成立する。

**Proposition 7.1** 任意の $X \subseteq E$ と $a \notin X$ に対して

$$\mathbb{P}(\mathbb{F} \downarrow X)_a = \mathbb{P}_a/X, \qquad \mathbb{C}(\mathbb{C} \downarrow X)_a = \mathbb{C}_a \setminus X$$

が成立する。ここで、右辺は clutter としてのマイナーであることに注意。

**参考：Mengerian, weak MFMC**　$\mathbb{L} \subseteq 2^E$ を clutter, $M$ を $\mathbb{L}$ に対応する $|\mathbb{L}| \times |E|$ 型の $0,1$–行列とする。($M$ の各行ベクトルが $\mathbb{L}$ の元の集合を表わす。) このとき、$w$ を非負整数値ベクトルとして以下を考える。

$$(P)\begin{cases} \max & y \cdot 1 \\ y & \geq & 0 \\ yM & \leq & w \end{cases} \qquad (D)\begin{cases} \min & w \cdot x \\ x & \geq & 0 \\ Mx & \leq & 1 \end{cases}$$

**Def. 7.1** 任意の非負整数値ベクトル $w$ に対して、(D) に常に整数最適解が存在するとき、$\mathbb{L}$ は weak MFMC 性を持つという。(P), (D) の両方に常に整数最適解が存在するとき、$\mathbb{L}$ は Mengerian であるという。

このとき、以下が成立する。(Seymour [28])

- $\mathbb{L}$ が weak MFMC ならば、そのマイナーもすべて weak MFMC である。
- $\mathbb{L}$ が weak MFMC ならば、$b(\mathbb{L})$ も weak MFMC になる。
- $\mathbb{L}$ Mengerian ならば、そのマイナーも Mengerian になる。

**例 7.1** $Q_6$ は weak MFMC だが、Mengerian ではない。それに対して、$b(Q_6)$ は Mengerian である。

# 8 Pack するクラスと pack しないクラス

In the following we shall investigate on each class of antimatroids whether $\mathbb{P}_x$ and $\mathbb{C}_x$ pack or not.

(A) **Edge-shelling of trees**

**Proposition 8.1** For a tree $T = (V, E)$ and an edge $x \in E$, let $X_1, X_2$ be the set of edges of the two connected components of $T - x$, and suppose $X_1, X_2 \neq \emptyset$. Then for the edge-shelling antimatroid of $T$,

$$\mathbb{P}_x = \{X_1,\ X_2\}.$$

A triple $(a, b, c)$ of edges is called *colinear* if they lie on a path in $T$ with $b$ contained internally. Then we have

$$\mathbb{C}_x = \{\{y, z\} : (y, x, z) \text{ is collinear in } T\}$$

Hence for edge-shelling antimatroids of trees, $\mathbb{P}_x$ and $\mathbb{C}_x$ both pack.

(B) **Shelling and double shelling of posets**

**Proposition 8.2** Let $P = (E, \leq)$ be a finite poset. For $a \in E$, let $I(a)$ and $F(a)$ denote the principal ideal and the principal filter of $a$, respectively.

1) For a shelling antimatroid of $P$ and $x \in E$, we have

$$\mathbb{P}_x = I(x) \setminus x, \qquad \mathbb{C}_x = \{\{y\}\ :\ y \in E,\ y < x\ \},$$

and both $\mathbb{P}_x$ and $\mathbb{C}_x$ pack.

2) For a double shelling antimatroid of $P$ and $x \in E$, we have

$$\mathbb{P}_x = \{I(x) \setminus x,\ F(x) \setminus x\}, \qquad \mathbb{C}_x = \{\{y, z\}\ :\ y, z \in E,\ y < x < z\ \}$$

and both $\mathbb{P}_x$ and $\mathbb{C}_x$ pack.

(C) **Transitivity antimatroids**

**Proposition 8.3** Let $G = (V, E)$ be a transitively oriented graph, and $(E, \mathbb{F})$ the associated transitivity antimatroid. Let $x = (a, b) \in E$ and suppose $\{x\} \notin \mathbb{F}$. Then

$$\mathbb{C}_x = \{\{f, f'\}\ :\ f = (a, c) \in E,\ f' = (c, b) \in E \ \text{ for some } c \in V\}.$$

And if we write $\mathbb{C}_x = \{\{f_i, f_i'\}\ :\ i = 1, \ldots, k\}$, then

$$\mathbb{P}_x = \{\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}\ :\ g_i = f_i \text{ or } f_i' \ \text{ for } i = 1, \ldots, k\}$$

In particular $\mathbb{P}_x$ and $\mathbb{C}_x$ always pack for transitivity antimatroids.

(D) **For node-search and line-search antimatroids of graphs and digraphs**, $\mathbb{P}_x$ and $\mathbb{C}_x$ necessarily pack. This fact is a mere restatement of Menger's theorem and König's theorem. In fact, it is easily shown that for a node set $A$, $A \in \mathbb{P}_x$ if and only if $A$ is a set of interior nodes of a chordless path from the root $r$ to $x$ in $G$ [23]. And $B \in \mathbb{C}_x$ is equal to a minimal separator between $r$ and $x$. Packing property for the case of line-search follows also from Mengre's theorem of edge version. Hence,

**Proposition 8.4** $\mathbb{P}_x$ and $\mathbb{C}_x$ pack for an node-search antimatroid and a line-search antimatroid of graphs and digraphs.

(E) **Convex geometry associated with acyclic oriented matroids and convex shelling of point configurations in affine spaces:** As is mentioned in (j), antimatroids can be defined from acyclic oriented matroids. And in the special case that the oriented matroid is derived from an acyclic digraph $G = (E, A)$, $\mathbb{P}_x$ and $\mathbb{C}_x$ both pack since this is again a mere restatement of Menger's theorem on $G$. Hence,

**Proposition 8.5** Let $\mathcal{M}$ be an oriented matroid given by an acyclic digraph $G = (V, E)$. Then for an antimatroid $\mathbb{F}_{\mathcal{M}}$ defined through the closure operator (4.1), $\mathbb{P}_x$ and $\mathbb{C}_x$ both pack.

But unfortunately, the above result cannot be extended to all the realizable acyclic oriented matroids since the class of antimatroids derived from realizable acyclic oriented matroids is equal to convex shelling of point configurations in affine spaces and there is a counterexample of a point configuration consisting of six points in a two-dimensional affine space such that neither $\mathbb{P}_x$ nor $\mathbb{C}_x$ packs for one of the points.

(F) **Node-shelling antimatroids of trees:** We can explicitly determine the families $\mathbb{P}_x$ and $\mathbb{C}_x$ for node-shelling of trees as:

**Proposition 8.6** Let $T = (E, X)$ be a tree, and $(E, \mathbb{F})$ the node-shelling antimatroid on the node set $E$. For $x \in E$, we have

$$\mathbb{P}_x = \{S \setminus x \ : \ \text{Deleting an edge incident to } x \text{ gives two connected components, and } S \text{ is the node set of the one part which contains } x \ \}$$

$$\mathbb{C}_x = \{ \ \{y, z\} \ : \ y, z \in E, \ \text{there is a path in } T \text{ with } y \text{ and } z \text{ as endpoints and containing } x \text{ as an interior node } \}$$

However, $\mathbb{P}_x$ and $\mathbb{C}_x$ do not pack in general for this class. $K_{1,3}$ is a simple counterexample. Let $E = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ be the node-set of $K_{1,3}$ such that $u_4$ is the center node. Then we have $\mathbb{P}_{u_4} = \{\{u_1, u_2\}, \{u_2, u_3\}, \{u_1, u_3\}\}$ and $\mathbb{C}_{u_4} = \{\{u_1, u_2\}, \{u_2, u_3\}, \{u_1, u_3\}\}$. They do not pack either. In other words, for a node-shelling of a tree, all the $\mathbb{P}_x$ and $\mathbb{C}_x$ pack if and only if it is a simple path (in the ordinary graph-theoretic sense).

(G) **Simplicial shelling of chordal graphs**: There is also a counterexample for simplicial shelling of chordal graphs. Let $K_n$ be a complete graph on $n$ vertices, say $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, and $P_m$ be a set of $m$ independent vertices, say $Y = \{v_1, \ldots, v_m\}$. Then we define a graph $G_{n,m} = K_n \otimes P_m$ so that the vertex set is $X \cup Y$ and the edge set is $E(K_n) \cup \{\{x, v\} \ : \ x \in X, \ v \in Y\}$. As is easy to see, $G_{n,m}$ is a chordal graph. Then for $i = 1, \ldots, n$,

$$\mathbb{P}_{x_i} = \{Y \setminus v_j \ : \ j = 1, \ldots, m\}, \qquad \mathbb{C}_{x_i} = \{\{v_j, v_k\} \ : \ 1 \leq j < k \leq m\},$$

hold, and neither $\mathbb{P}_{x_i}$ nor $\mathbb{C}_{x_i}$ packs if $n \geq 1$ and $m \geq 3$.

We can summarize so far established results as follows:

I. $\mathbb{P}_x$ and $\mathbb{C}_x$ do pack for

- 木の辺シェリング
- poset shelling
- poset の二重シェリング (= 有向グラフの convex sets の凸幾何 (Pfaltz [29]) )
- transitivity antimatroids (= 同一台集合上の半順序のなす凸幾何 )
- グラフ、有向グラフの点探索/辺探索
- acyclic 有向グラフが定める有向マトロイドの凸幾何

II. $\mathbb{P}_x$ and $\mathbb{C}_x$ do not pack in general for

- 木の点シェリング
- 三角化グラフの単体的シェリング
- 根付き三角化グラフの単体的シェリング
- affine 空間中の点配置の convex shelling (= realizable な acyclic 有向マトロイドに伴う凸幾何)
- lower convex shelling in real n-dimensional space $\mathbb{R}^n$

- $B_3$–free な join-distributive lattice での doubly irreducible な元のシェリングの定めるアンチマトロイド
- semilattice の部分束のなす凸幾何

III. 未判明のもの

- k-family of posets
- 強三角化グラフの simple vertex shelling
- 有向グラフ中の separating sets

# References


[1] A. Björner, "On matroids, groups and exchange languages," in: L. Lovász and A. Recski, eds., Matroid Theory and its Applications: Conference Proceedings (Szeged, 1982), Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, North-Holand, 1983, 219–232.

[2] A. Björner, L. Lovász and P. W. Shor, "Chip-firing games on graphs," Europ. J. Combi. (1991) 12, 283–291.

[3] A. Björner and G. M. Ziegler, "Introduction to Greedoids", in: N. White ed., Matroid Applications, Cambridge University Press, 1992.

[4] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White and G. M. Ziegler, *Oriented Matroids*, Cambridge University Press, 1993.

[5] G. Bordalo and B. Monjardet, "Reducible classes of finite lattices," Order 13 (1996), 379–390.

[6] E. A. Boyd and U. Faigle, "An algorithmic characterization of antimatroids," *Discrete Applied Math.* **28** (1990) 197–205.

[7] B.L. Dietrich, "Matroids and antimatroids – A survey," Disc. Math. 78 (1989), 223–237.

[8] P.H. Edelman, "Meet-distributive lattices and the anti-exchange closure," Algebra Universalis 10 (1980) 290–299.

[9] P.H. Edleman, "The lattice of convex sets of an oriented matroid," J. Comb. Theo. B 33 (1982), 239–244.

[10] P.E. Edelman, "Abstract convexity and meet-distributive lattices," Contemporary Math. 57 (1986), 127–150.

[11] P.H. Edelman and R.E. Jamison, "The theory of convex-geometries," Geometriae dedicata 19 (1985) 247–270.

[12] P.H. Edelman and P. Klinsberg, "The subposet lattices and the order polynomials," Europ. J. Comb. 3 (1982), 341–346.

[13] P.H. Edelman and M.E. Saks, "The convexity dimension of meet-distributive lattices," .

[14] M. Farber and R.E. Jamison, "Convexity in graphs and hyper graphs," SIAM J. Alg. Disc. Math. 7 (1986), 433–444.

[15] C. Greene and D.J. Kleitman, "The structure of Sperner k-families," J. Comb. Theo. A 20 (1975), 41–68.

[16] O. Goecke, B. Korte and L. Lovász, "Examples and algorithmic properties of greedoids." In B. Simeone (ed.): *Combinatorial Optimization. Como 1986, Lecture Notes in Mathematics Vol. 1403* (Springer, 1989), 113–161.

[17] R. Jamison-Waldner, "Copoints in antimatroids," Proc. of the Eleventh southeastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing, (Boca Raton), Cong. Num. 33 (1981), 129–142.

[18] B. Korte and L. Lovász, "Shelling strucutre, convexity, and a happy end," in: B. Bollobas, ed., Graph Theory and Combinatorics: Proceedings of the Cambridge Combinatorial Conference in Honour of Paul Erdös, Academic Pres, 1984, 219–232.

[19] B. Korte, L. Lovász and R. Schrader, Greedoids, Springer, 1991.

[20] B. Monjardet, "A use for frequently rediscovering a concept," *Order* 1 (1985), 415–741.

[21] M. Nakamura, "A single-element extension of antimatroids," to appear in *Disc. Appl. Math.*

[22] M. Nakamura, "Algorithmic characterizations of non-simple greedoids and antimatroids," *Proceedings of the Japan– Korea Joint workshop on Algorithms and Computation*, Tokyo, July 2000, 122–129.

[23] M. Nakamura, "Excluded-Minor Characterizations of Antimatroids arisen from Posets and Graph Searches," to appear in *Electro Notes of Combinatorics,* also submitted to *Discrete Mathematics.*

[24] 中村政隆、「 Locally free lattice のなすアンチマトロイド」(メモ)、中村研ゼミ、2000/9/18.

[25] Y. Okamoto and M. nakamura, "The forbidden minor characterization of line-search antimatroids of rooted digraphs," (in preparation)

[26] N. Polat, "Treillis de séparation de graphes," Canad. J. Math. 28 (1982), 341–346.

[27] J.S. Pym and H. Perfect, "Submodular functions and independence structures," J. of Mathematical Analysis and applications 30 (1970), 1–31.

[28] P.D. Syemour, "The matroids with the max-flow min-cut property," *J. Combinatorial Theory* B (1977), 189–222.

[29] J.L. Pfaltz, "Convexity in graphs," J. Comb. Theo B 10 (1971), 143–162.

[30] J.S. Pym and H. Perfect, "Submodular functions and independence structures," J. Math. Anal. Appl. 30 (1970), 1–31.

アンチマトロイドについては Korte, Lovász and Schrader [19] に、ひととおりの知識がコンパクトにまとめてある。Survey として読むのによい論文としては、Edelman and Jamison [11], Dietrich [7], Korte and Lovász [18] などがある。Björner [1, 3] は言語としての扱いが中心だが、greedoid, antimatroid その他の概念が詳細に取り扱われている。